Matemáticas II

Manual de asignatura

Sistema de Universidades Tecnológicas

ELECTRICIDAD Y ELECTRÓNICA INDUSTRIAL

Programa 2004

Créditos

Elaboró: Ing. Alma Aurora Ravell Pech
Profesor de asignatura de matemáticas
Ing. Angélica Herrera Lugo
Profesor de asignatura de matemáticas

Revisó: Ing. Juan Carlos Manzanilla Vallejo

Autorizó:

Contenido

Objetivo general

Aplicar el cálculo diferencial e integral para solucionar problemas del área eléctrico mecánica

Habilidades por desarrollar en general

Obtener y resolver ecuaciones diferenciales así como transformadas de Laplace que representen sistemas electromecánicos. Aplicación de la serie de Fourier

I

Funciones

Objetivo particular de la unidad
Identificar diversos tipos de funciones y analizar su relación con procesos reales

Habilidades por desarrollar en la unidad
Realiza operaciones con funciones y determinar su correspondiente dominio

I.1 FUNCIONES.

Saber en la Teoría (5 hrs.)

Definición de función real y su representación gráfica.

Una función de un conjunto A a un conjunto B, simbolizada por $f : A \rightarrow B$ (se lee f de A en B) es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento del conjunto A con un único elemento del conjunto B.

A cada elemento de B se le llama imagen de a bajo f y se denota por f(a). Al conjunto A se le denomina dominio y al conjunto B codominio o contradominio.

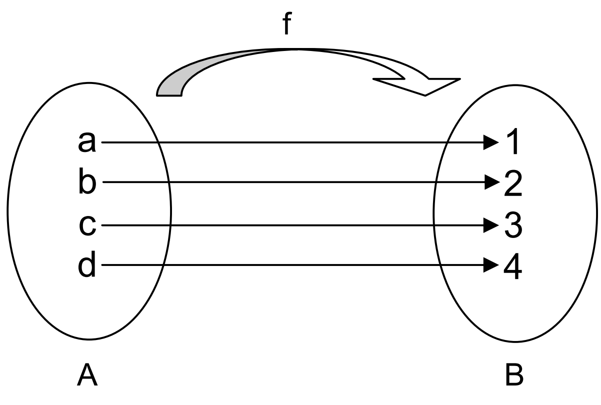


Figura 1

Una función es real si y solo si el contradominio de la función es un subconjunto de los números reales.

$$C_f \subset R$$

Una función f es de variable real si y solo si el dominio de la función es un subconjunto de los números reales.

$$D_f \subset R$$

Una función f es real y de variable real si el dominio y contradominio de la función pertenecen a los números reales.

$$D_f \subset R$$
$$C_f \subset R$$

Una función queda completamente definida cuando se conoce su dominio y su regla de correspondencia

Se define la gráfica de una función f como el conjunto de todos los puntos (x,f(x)) en un plano coordenado con x en el dominio de f. Las gráficas son muy útiles para describir el comportamiento de f(x) cuando x varía. También se puede describir la gráfica de f como el conjunto de puntos P(x,y) , tales que y= f(x)

Definiciones de dominio, codominio y recorrido. Notación funcional.

El dominio de una función f es el conjunto de valores que puede tomar la variable y en los cuales es posible aplicar las reglas de correspondencia. De acuerdo a la figura 1, el conjunto A representa al dominio.

El contradominio de una función es el conjunto de todos los elementos que pueden ser imagen de algún elemento del dominio.

A cada uno de los elementos que componen al contradominio se les denomina imagen y corresponden a algún elemento del dominio.

Funciones implícitas y explícitas.

Una función y = f(x), la cual se encuentra despejada como y en términos de x, se dice que es una función explícita de x.

Funciones inversas, polinomiales, relaciones algebraicas.

Si f es una función uno a uno con un dominio X y rango Y, entonces una función g con dominio Y y rango X se llama la función inversa de f si:

a) f(g(x)) = x para cada x en Y

b) g(f(x)) = x para cada x en X.

Una función polinomial es aquella que tiene la siguiente estructura :
$f(x)= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2}+......+ a_{n-1}x+ a_n$, donde $a_0 \neq 0$ y D_f = R.

Relaciones algebraicas

Las cantidades que intervienen en una cuestión matemática son constantes cuando tienen un valor fijo y determinado y son variables cuando toman diversos valores.

Cuando se conoce de un modo preciso la relación que liga a las variables, esta relación puede establecerse matemáticamente por medio de una fórmula o ecuación que nos permite, para cualquier valor de la variable independiente, hallar el valor correspondiente de la función, este tipo de función se denomina sunción analítica.

Cuando por observación de los hechos sabemos que una cantidad depende de otra, pero no se ha podido determinar la relación que liga a esas variables, se dice que hay una relación concreta. En este caso la ley de dependencia que no se conoce con precisión no puede establecerse matemáticamente por medio de una fórmula o ecuación porque la relación funcional, aunque existe no siempre es la misma

Función compuesta, definición y representación gráfica.

Dada dos funciones f y g, la función compuesta $(f\circ g)(x)$,(se lee f compuesta con g de x, f círculo g ó g seguida de f), es la función definida por f(g(x)), donde el dominio de f compuesta con g es $D_{f\circ g} = \{x / x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

Gráfica

La gráfica de una función, es el conjunto de parejas ordenadas (x,y) tales que $x \in D_f, y \in C_f$.

$$G_f = \{(x, y)/ x \in D_f \wedge y \in C_f\}$$

Formulación de funciones. Igualdad, adición

Dadas dos funciones f,g:

a) Su suma denotada por (f+ g) (x), es la función definidad por f(x) + g(x).

(f+g) (x) = f(x) +g(x) $\qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$

a) Su diferencia denotada por (f- g) (x), es la función definidad por f(x) + g(x).

(f-g) (x) = f(x) -g(x) $\qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$

a) Su producto denotada por (f$*$ g) (x), es la función definidad por f(x) $*$ g(x).

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) \qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

a) Su cociente denotada por ($\frac{f}{g}$) (x), es la función definidad por $\frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x / g(x) = 0\}$$

Saber Hacer en la practica (7 hrs.)

Analizar funciones, modelando algunos casos reales e identificando su dominio y codominio. Interpretará la notación.

Analizaremos primeramente como se halla el dominio de funciones. Es importante recordar que trabajaremos en el campo de los números reales, por lo que en cualquier fracción si el denominador es cero se vuelve indeterminada y que no existen raíces cuadradas negativas.

En los siguientes ejercicios, dadas las funciones, hallamos su Dominio

1. $f(x) = \frac{5x+4}{3x^3 - 27x}$

f(x) no existe si y solo si el denominador es igual a cero ya que la fracción se volvería indeterminada, entonces procedemos a hallar los puntos críticos, es decir, aquellos valores que volverían cero al denominador:

$$3x^3 - 27x = 0$$

$$3x(x^2 - 9) = 0$$

$$3x(x-3)(x+3) = 0 \,,$$

Se generaron tres factores, por lo que habrá tres números críticos:

$$3x = 0 \rightarrow x = 0$$
$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$
$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

Entonces el -3,0 y3 son números que no pueden entrar a la función porque la volverían indeterminada, por lo que el dominio son todos los números reales con excepción de aquellos que volverían indeterminada a la función:

$$D_f = \Re - \{-3,0,3\}$$

2. $f(x) = \sqrt{5x^2 - 125}$

f(x) no existe si y solo $\sqrt{5x^2 - 125}$ < 0 porque se volvería indeterminada, pero si existe si $\sqrt{5x^2 - 125}$ ≥ 0, entonces hallemos los puntos críticos, es decir, los valores que harían indeterminada a la función:

$5x^2 - 125 = 0$

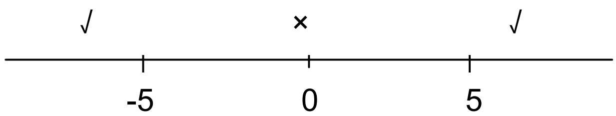
$5(x^2 - 25) = 0$

$5(x-5)(x+5) = 0$

Se generaron dos factores por lo que habrá dos puntos críticos

x-5=0 → x= 5
x+5=0 → x = -5

Analizando como se comportan los números diferentes a 5 y -5



Los números que están antes del -5 y después del 5 si pueden entrar a la función porque no la hacen indeterminada, pero cualquier número comprendido entre el -5 y 5 no pueden entrar porque hacen que no exista la función. Ahora cuando el 5 y el -5 entran a la función el resultado es cero por lo que si existe la función, entonces el dominio queda de la siguiente manera:

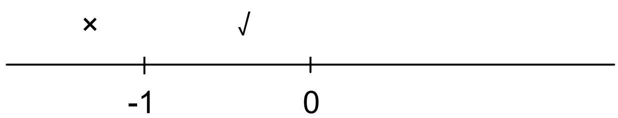
$$D_f = (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$$

Realizar adecuadamente algunas operaciones con funciones, suma, resta, multiplicación, división y funciones compuestas en la resolución de problemas, utilizando diferentes tipos de funciones

Dada las siguientes funciones $f(x)=\sqrt{1+x}$ y $g(x)=\sqrt{x-4}$, hallar (f+ g) (x), (f- g) (x), (f$*$ g) (x) ($\frac{f}{g}$) (x)

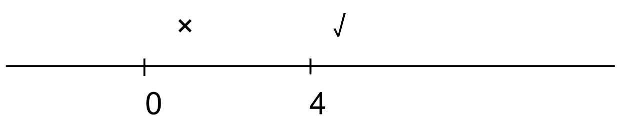
Primero hallamos el dominio de cada función, para posteriormente intersectarlos.

$f(x)=\sqrt{1+x}$
f(x) no existe si 1+x<0, pero si existe si 1+x ≥ 0, entonces hallemos los puntos críticos
1+x=0$\rightarrow$ x=-1, ahora analicemos como se comportan los números



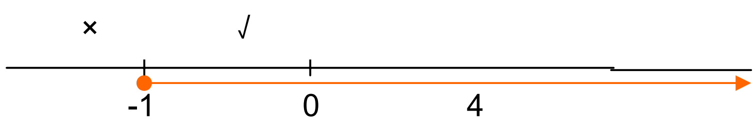
Cualquier número menor que el -1 no puede entrar a la función porque la vuelve indeterminada, pero todos los números mayores que el -1, inclusive el -1 si pueden entrar a la función porque el resultado es cero o positivo y de esta manera si existe la función, por lo tanto el $D_f=[-1,\infty)$

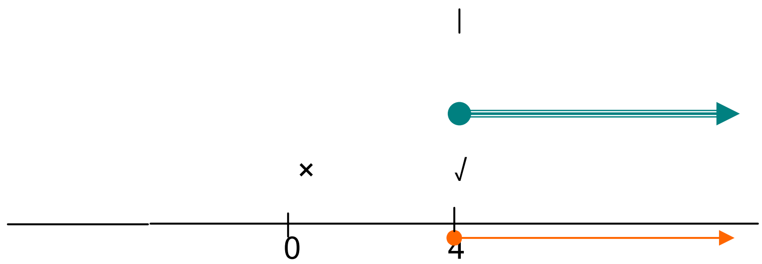
$g(x)=\sqrt{x-4}$
g(x) no existe si x-4<0, pero si existe si x-4 ≥ 0, entonces hallemos los puntos críticos
x-4=0$\rightarrow$ x=4, ahora analicemos como se comportan los números



Cualquier número menor que el 4 no puede entrar a la función porque la vuelve indeterminada, pero todos los números mayores que el 4, inclusive el 4 si pueden entrar a la función porque el resultado es cero o positivo y de esta manera si existe la función, por lo tanto el $D_f=[4,\infty)$

Ahora intersecmos los dominios, recordemos que la intersección son todos los elementos que están en todos los conjuntos al mismo tiempo





Los números que están a partir del 4, incluyendo al 4, son los números que están en ambos dominio, por lo que $D_f \cap D_g = [4,+\infty)$.

Hallando las operaciones con funciones:

a) (f+g) (x)= f(x) +g(x)

$$= \sqrt{1+x} + \sqrt{x-4}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [4,+\infty)$$

b) (f+g) (x)= f(x) - g(x)

$$= \sqrt{1+x} - \sqrt{x-4}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = [4,+\infty)$$

a) (f$*$g) (x)= f(x) $*$g(x)

$$= \sqrt{1+x} * \sqrt{x-4}$$

$$D_{f*g} = D_f \cap D_g = [4,+\infty)$$

b) (f/g) (x)= f(x)/ g(x)

$$= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-4}}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = (4,+\infty)$$

<u>Resolver las prácticas de la Guía de Prácticas de la asignatura.</u>

II

Límites y continuidad

Objetivo particular de la unidad
Interpretar el concepto de límites y continuidad de funciones

Habilidades por desarrollar en la unidad
Escribir la habilidad propuesta que se debe desarrollar en esta asignatura.

I.1 LIMITES Y CONTINUIDAD.

Saber en la Teoría (5 hrs.)

Definir el concepto intuitivo de límite de una función.

Consideremos una función $f(x)=\frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)}$, de manera tal que su dominio son R-$\{-1\}$. Observemos que sucede cunado x se aproxima o toma valores muy cercanos a uno. Tabulemos los resultados:

si $x \to 1^-$

x	f(x)
0.5	4.0
0.7	4.4
0.8	4.6
0.9	4.8
0.99	4.98
0.999	4.998

si $x \to 1^+$

x	f(x)
1.5	6.0
1.3	5.6
1.2	5.4
1.1	5.2
1.01	5.02
1.001	5.002

De lo anterior, se observa que a medida que x se aproxima a uno, el valor de f(x), se aproxima a otro cierto valor que es este caso es 5, lo cual se expresa de la siguiente manera

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

Por lo tanto la definición de límite queda de la siguiente manera:

Sea f una función definida en todo número de algún intervalo abierto I y que contenga a "a", excepto a a "a" misma, entonces el límite de f(x) es l y se escribe:

$$\text{Lim} \quad (x) = l$$

$x \to a$

Consideremos ahora una ilustración de la figura 2.1. En geometría plana la recta l tangente a un punto P sobre un círculo a veces se define como la recta que tiene solamente al punto P en común con el círculo, como se ilustra en la parte i de la figura 2.1. Esta definición no puede extenderse a gráficas arbitrarias, ya que una recta tangente puede intersectar a una gráfica carias veces como se muestra en la parte ii de la figura 2.1

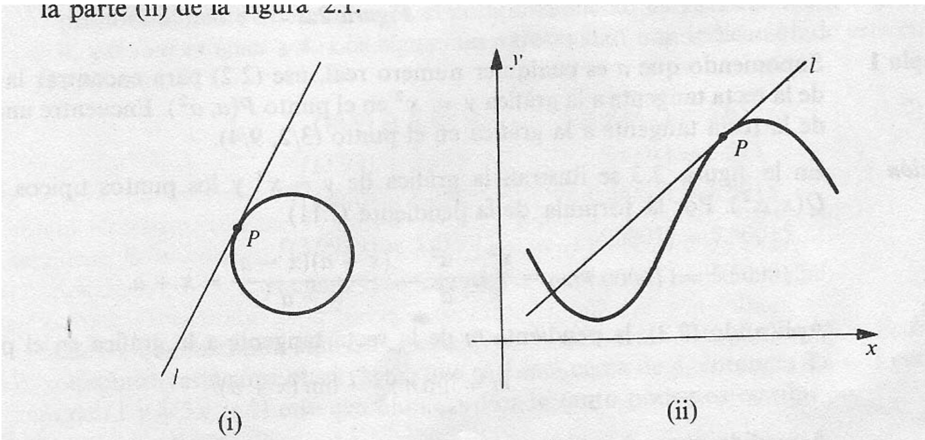


Figura 2.1

Para definir la recta tangente l en un punto P sobre la gráfica de una ecuación, es suficiente dar la pendiente m de l, ya que ésta determina completamente a la recta. Para obtener la pendiente escogemos cualquier otro punto Q sobre la gráfica y consideramos la recta que para por P y Q como en la parte i de la figura 2.2. Una recta que corta a una gráfica de este modo se llama recta secante a la gráfica. Se ve que si Q está cerca de P, entonces la pendiente m_{PQ} de la recta que pasa por P y Q debe estar cerca de la pendiente de l. Por esta razón, si m_{PQ} tiene un valor límite m cuando Q se aproxima a P, definimos la pendiente de l como este valor m si a es la abcisa de P y x es la abcisa de Q, entonces para muchas gráficas la frase "Q se acerca a P", puede sustituirse por "x se acerca a a" y tenemos $m = \lim_{x \to a} m_{PQ}$

Es importante aclara que x debe ser diferente a a, porque si x=a, entonces P =Q y m_{PQ} no existe

Teorema sobre límites

A continuación se describen los teoremas con los que se resuelven los límites.

1. Si m y n con unas constantes cualquiera, entonces

$$\lim_{x \to a} (mx \pm n) = ma \pm n$$

2. Si c es una constante cualquiera, entonces

$$\lim_{x \to a} c = c$$

3. $\lim_{x \to a} x = a$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$

4. $\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$

5. $\lim_{x \to a} \left[f(x) * g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x) = L * M$

6. $\lim_{x \to a} \left[f(x) / g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) / \lim_{x \to a} g(x) = L / M$, siempre que $M \neq 0$

7. $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n = L^n$

8. $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Límite de una función de una variable

Definición de la continuidad o no continuidad de una función en un punto y en un intervalo.

Una función f es continua en el punto x=a si cumple con las tres siguientes condiciones:

1. F(a) existe

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

3. $F(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Si alguna de la tres condiciones no se cumple, entonces la función deja de ser continua y se dice que es discontinua en el punto x=a.

Una función presenta discontinuidad de tipo removible si es posible volver la función continua redefiniendo el valor de la función en el punto de discontinuidad. La característica de una discontinuidad de tipo removible es que la segunda condición no falla. Una función se dice que tiene discontinuidad esencial si no es posible volver continua a la función redefiniendola en el punto. La característica de una discontinuidad esencial es que siempre falla la segunda condición.

Si una función f está definida en un intervalo $[a,b]$, entonces f es continua en $[a,b]$ si es continua en (a,b) y ademas $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(b)$

Si una función f es continua en todos los números de un intervalo (a,b), decimos que f es continua en el intervalo (a,b).

Teorema sobre funciones contínuas.

1. Si f y g son dos funciones continuas en el punto a, entonces:

   a. f+g es continua en a

   b. f-g es continua en a

   c. f*g es continua en a

   d. f/g es continua en a, suponiendo que g(a) $\neq 0$

2. Una función polinomial es continua en todo número.

3. Una función racional es continua en todo número de su dominio.

En general podemos decir que toda función es continua es su dominio de tal manera que si nos piden analizar la continuidad de una función, únicamente debemos analizar los puntos que no estén en el dominio de la función, o si es una función definida en un punto, se analiza la continuidad en los puntos de cambio.

Saber Hacer en la practica (5 hrs.)

Calcular e interpretar el límite de una función y su representación geométrica

1. Suponga que a es un número real cualquiera, encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y=x^2$ en el punto $P(a,a^2)$. Encuentre una ecuación de la recta tangente ala gráfica en el punto (3/2,9/4).

Resolviendo

En la figura 2.3 se ilustran la gráfica y=x2 y los puntos típicos $P(a,a^2)$ y $Q(x,x^2)$. Por la fórmula de la $m_{PQ}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}=x+a$

La pendiente m de la recta tangente a la gráfica en el punto P es

$$M=\lim_{x \to a} m_{PQ} = \lim_{x \to a} (x+a)$$

A medida que x se acerca más y más a “a”, la expresión x+a se acerca a “a+a” osea 2 a. Por lo tanto m= 2 a.

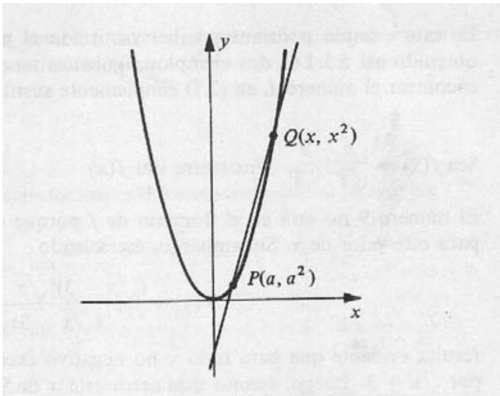


Figura 2.3

Cuando la pendiente de recta tangente en el punto (3/2, 9/4), se obtiene el caso particular en el que a=3/2, tenemos que m =2(3/2)=3, por lo que ecuación de la recta tangente queda de la siguiente manera:

$$y-\frac{9}{4}=3(x-\frac{3}{2})$$

ya simplificado la ecuación queda : 12x -4y -9 = 0

2. Hallar $\lim_{x \to 3} 2x^2 - 4x + 5$

Se aplican directamente los teoremas para resolver, esto es sustituir directamente el valor al que tiende x en la función.

$$\lim_{x \to 3} 2(3)^2 - 4(3) + 5 = 11$$

Por lo tanto el límite de la función cuando x tiene a 3 es 11.

3. Hallar $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

En muchas ocasiones al sustituir en la función el valor al que tiende el límite, éste se vuelve indeterminado, por lo que hay que romper la indeterminación ya sea factorizando ó racionalizando (ejemplo 4), este tipo de límites se llama límites aparentemente indeterminados.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

4. $$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+t}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+t}}{t} * \frac{1 + \sqrt[3]{1+t} + \sqrt[3]{(1+t)^2}}{1 + \sqrt[3]{1+t} + \sqrt[3]{(1+t)^2}} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - (\sqrt[3]{1+t})^3}{t(1 + \sqrt[3]{1+t} + \sqrt[3]{(1+t)^2}} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - (1+t)}{t(1 + \sqrt[3]{1+t} + \sqrt[3]{(1+t)^2}} = \lim_{t \to 0} \frac{-t}{t(1 + \sqrt[3]{1+t} + \sqrt[3]{(1+t)^2}}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{1+t} + \sqrt[3]{(1+t)^2}} = \lim_{t \to 0} \frac{-1}{(1 + \sqrt[3]{1+0} + \sqrt[3]{(1+0)^2}} = \lim_{t \to 0} \frac{-1}{1+1+1} = \frac{-1}{3}$$

Determinar la continuidad y no continuidad de una función

1. Sea f(t) = $\left\{ \begin{array}{ll} 9 - t^2, & si\ t \le 2 \\ 3t + 2, & si\ t > 2 \end{array} \right\}$, probar la continuidad de f en el punto t =2

Comprobando si se cumplen las tres condiciones:

a. f(a) existe
f(2)= 5, por lo tanto existe.

b.Resolviendo el límite. Debido a que la función tiene dos partes, entonces se resuelve por límites unilaterales.

$\lim\limits_{t \to 2^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 2^+} (3t + 2) = 8$

$\lim\limits_{t \to 2^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 2^-} (9 - t^2) = 5$

Como los límites unilaterales son diferentes entonces el límite no existe, por lo tanto falla la segunda condición y la función es discontinua en el punto t = 2. La discontinuidad es escencial.

2. Determinar los valores en los cuales la siguiente función sería continua

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

Hallemos el dominio de la función ya que toda función siempre es continua en su dominio.

$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

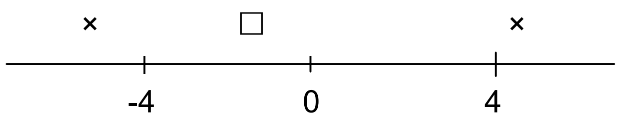
f(x) no existe si $16 - x^2 < 0$, pero si existe si $16 - x^2 \geq 0$, entonces hallemos los puntos críticos

Factorizando

$(4-x)(4+x) = 0$

$4 - x = 0 \rightarrow x = 4$

$4 + x = 0 \rightarrow x = -4$, ahora analicemos como se comportan los números



Cualquier número menor que el -1 y mayor que 4 no puede entrar a la función porque la vuelve indeterminada, pero todos los números entre el -4 y 4, inclusive el -4 y 4 si pueden entrar a la función porque el resultado es cero o positivo y de esta manera si existe la función, por lo tanto el $D_f = [-4,4]$, por lo tanto la función es continua en el intervalo $D_f = [-4,4]$

<u>Resolver las prácticas de la Guía de Prácticas de la asignatura.</u>

III

La derivada y sus aplicaciones

Objetivo particular de la unidad
Aplicar la derivada par analizar el comportamiento de fenómenos físicos resolviendo problemas prácticos

Habilidades por desarrollar en la unidad
Evaluar a la derivada directamente

I.1 LA DERIVADA Y SUS APLICACIONES.

Saber en la Teoría (6 hrs.)

Concepto de derivada de una función y notaciones.

La derivada de la función f es otra función denotada por f ’(x), tal que su valor en cualquier número x del dominio de f está dado por:

$$F(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \text{si este límite existe.}$$

La derivada también se puede representar por la siguiente notación: f‘(x), D_xY, $\frac{dy}{dx}$, y’ y también se define como la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto (a,f(a)).

Interpretación geométrica de derivada y cálculo de ésta a partir de esta definición.

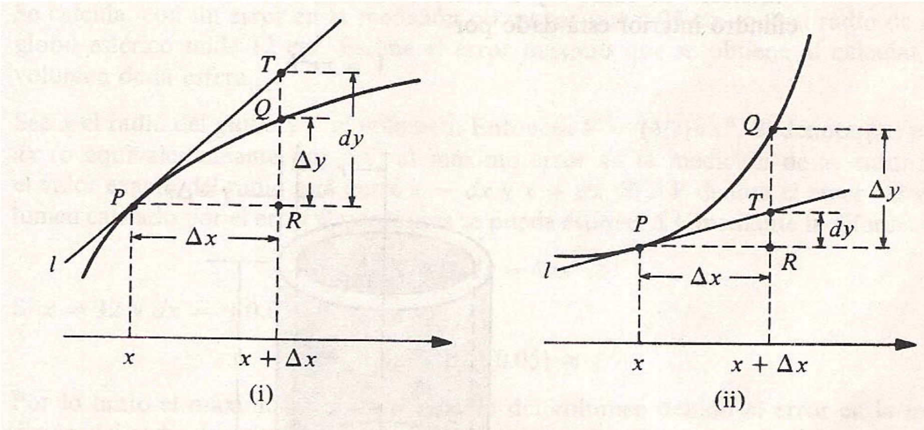


Figura 3.9

De acuerdo a la figura, consideraremos al punto P_1 fijo y al P_2 como movible sobre la curva. Podemos hacer que el P_2 se acerque al P_1 tanto como querramos, de tal manera que mientras más cerca se encuentra el P_2 del P_1, la pendiente de la secante estará cada vez más cerca de la pendiente de la tangente. De aquí podemos decir que si el P_2 tiende al P_1, entonces la pendiente de la secante tiende a la pendiente de la tangente.

Diferenciabilidad de una función

Sea f una función cualquiera. Consideremos la ecuación y = f(x) . En muchas aplicaciones se tiene que la variable independiente x varía ligeramente y se necesita encontrar la variación correspondiente de la variable dependiente y. Si se cambia de x_1 a x_2 , entonces la magnitud del cambio frecuentemente se denota por Δ_x , es decir $\Delta_x = x_2 - x_1$.

Al número Δ_x , se le llama incremento de x. Obsérvese que $x_2 = x_1 + \Delta_x$, es decir, que el segundo valor de x es igual al primero más el incremento de Δ_x . Análogamente Δ_y denotará la variación de la variable dependiente y correspondiente al cambio Δ_x . Entonces

$$\Delta_y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta_x) - f(x_1)$$

La representación geométrica de estos incrementos en términos de la gráfica de f se encuentran en la siguiente figura

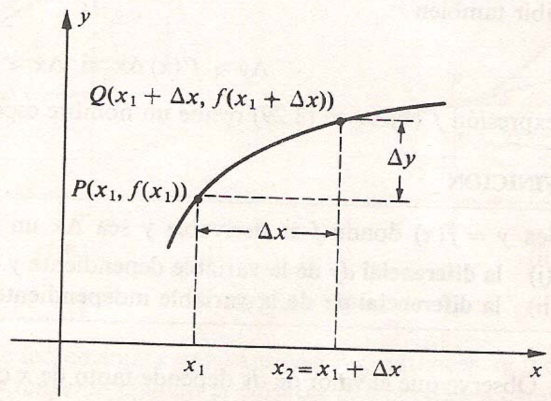


Figura 3.8

A partir de los conceptos anteriores se tiene que :

Sea y = f(x) donde f es derivable y sea Δ_x un incremento de x, entonces:

a. La diferencial dy de la variable dependiente y está dada por $dy = f\,'(x)\Delta x$

b. La diferencial dx de la variable independiente x está dada por dx= Δx .

En general, si se incrementa x una cantidad Δx , entonces dy indica que tanto sube o baja la recta tangente cuando la variable independiente cambia de x a x + Δx . Por otro lado Δ_y indica que tanto sube o baja la gráfica de P_1 y P_2.

Por lo tanto si Δx es pequeño, entonces $\Delta_x = dy = f'(x)dx = (D_x y)dx$.

Esto también resulta evidente desde el punto de vista geométrico observando la figura 3.9. Por lo tanto si y=f(x) , entonces se puede usar dy como una aproximación al incremento de Δ_y de la variable dependiente correspondiente a un incremento pequeño Δ_x de la variable x. Esta observación es útil para las aplicaciones en las que no se necesita una estimación muy exacta del incremento de la variable y.

Diferencia entre la derivada y el diferencial

Al definir las diferenciales dy y dx , se observa que el valor de dy depende tanto de x como de Δ_x , pero en cuanto a la variable independiente x , no hay diferencia alguna entre el incremento Δ_x y la diferencial dx. Entonces sustituyendo dx en lugar de Δ_x , se obtiene

$$dy = f'(x)dx$$

Despejando f'(x), que es la derivada

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Por lo tanto podemos expresar a la derivada como un cociente de dos diferenciales.

Teoremas de derivación

Usaremos la notación D_xY, donde D_x indica que hay que derivar una función e "y" la función a derivar. El subíndice nos indica en que términos debe estar la función, en este caso es en términos de x. Para los teoremas c nos indica una constante cualquiera.

1. La derivada de una constante es cero: $D_x(cte) = 0$

2. $D_x(x^n) = nx^{n-1}$

3. $D_x(c \bullet f(x)) = c \bullet D_x(f(x)) \rightarrow D_x(c \bullet x^n) = c \bullet D_x(x^n) = c \bullet nx^{n-1}$

4. $D_x(f(x) \pm G(x)) = D_x f(x) \pm D_x g(x)$

5. $D_x(f(x) \bullet G(x)) = f(x) \bullet D_x g(x) + g(x) \bullet D_x f(x)$

6. $Dx\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{(g(x))^2}$

7. Regla de la cadena: Sea y = f(u) y u = g(x) , entonces
$D_xY = (D_uY)(D_xU) = f'(u)g'(x)$

Saber Hacer en la practica (14 hrs.)

Aplicaciones de derivada en la resolución de algunos problemas geométricos y físicos.

Falta ejercicio geométrico y físico

2. Derivar las siguientes funciones

a). $f(x)=\dfrac{(x^2+3)(x-1)}{5-x^3}$

Para derivar f(x), usaremos los teoremas de división, producto y exponentes. Llamaremos u al numerador de la función, u= $(x^2+3)(x-1)$ y v al denominador, v= $5-x^3$, por lo que $f(x)=\dfrac{u}{v}$, entonces derivamos

$$f'(x)=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

$$u'=(x^2+3)(1)+(x-1)(2x)=x^2+3+2x^2-2x=3x^2-2x+3$$

$$v'=-3x^2$$

Sustituyendo las derivadas de u y v en f(x):

$$f'(x)=\frac{(5-x^3)(3x^2-2x+3)-(x^2+3)(x-1)(-3x^2)}{(5-x^3)^2}$$

Simplificando $f'(x)=\dfrac{-x^4+6x^3+6x^2-10x+15}{(5-x^3)^2}$

b) $f(z)=\sqrt[5]{4z^2+3}$

En esta función aplicaremos regla de la cadena, ya que desde que la expresión que este elevada a cualquier exponente tenga más de un término, se debe aplicar la regla.

Empecemos por expresar f(z) de manera exponencial y posteriormente derivar:

$$f(z)=(4z^2+3)^{\frac{1}{5}}$$

$$f'(z)=\frac{1}{5}(4z^2+3)^{\frac{-4}{5}}(8z)$$

$$f'(z)=\frac{8z}{5(4z^2+3)^{\frac{4}{5}}}$$

c) $x^3+y^3=8xy$

En esta función no está despejada y , pero si se encuentra en la expresión por lo que se deduce que la derivada de y está contenida también dentro de la función, es decir, es una derivada implícita. Resolviendo:

$$3x^2 + 3y^2 y' = 8(xy' + y(1))$$

$$3x^2 + 3y^2 y' = 8xy' + 8y$$
$$3y^2 y' - 8xy' = 8y - 3x^2$$
$$y'(3y^2 - 8x) = 8y - 3x^2$$
$$y' = \frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}$$

<u>Resolver las prácticas de la Guía de Prácticas de la asignatura.</u>

IV

Máximos y mínimos y problemas de optimización

Objetivo particular de la unidad
Utilizar la primera y segunda derivada en la solución de problemas de optimización

Habilidades por desarrollar en la unidad
Aplicaciones de la derivada para analizar el comportamiento de una función

IV.1 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Saber en la Teoría (1 hrs.)

Enunciado e interpretación geométrica y aplicaciones del teorema del valor medio del cálculo diferencial.

Teorema del valor medio

Si una función f es continua en un intervalo [a,b] y derivable en el intervalo (a.b), entonces existe un número c en (a,b) tal que f(b) – f(a) = f' (c)(b-a)

Saber Hacer en la practica (1 hrs.)

Resolver problemas donde se aplique el teorema del valor medio del cálculo diferencial

Demuestre que la función f definida por f(x) = x3-8x-5 satisface la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[1,4]$ y encuentre un número c en el intervalo (1,4) que satisfaga la conclusión del teorema.

Como f es un polinomio, entonces f es una función continua y derivable en todos los números reales. En particular es continua en $[1,4]$ y derivable en el intervalo abierto (1,4). Según el teorema del valor medio, existe un número c en (1,4) tal que,

F(4)- f(1) = f' (c) (4-1)

Como f ' (x) = 3x2 -8, esto es equivalente a

$27-(-12)= (3c^2 - 8)(3)$

despejando, obtenemos que c= $\pm\sqrt{7}$, por lo tanto el número deseado en el intervalo (1,4) es c = $\sqrt{7}$

IV.2 CRITERIOS DE MAXIMOS Y MÍNIMOS

Saber en la Teoría (4 hrs.)

Definición de máximos y mínimos de una función con la primera derivada.

Supongamos que cierto instrumento mide alguna cantidad física y se registran en la fig 1 . En este caso el eje x representa el tiempo y el eje y a las magnitudes de las cantidades medidas por el instrumento.

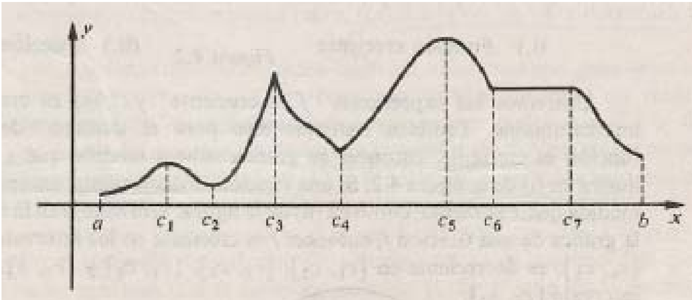


Figura 1

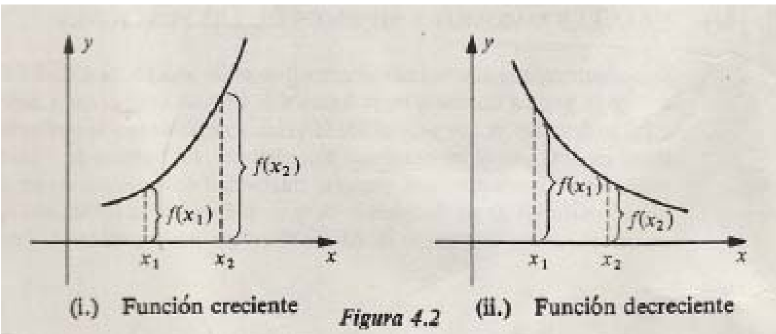
Si la gráfica representará una función f, sería conveniente representar de manera gráfica este comportamiento, es decir, f(x) cuando x varía:

Si una función f esta definida para cualquier intervalo I, entonces

i) f es **creciente** en I si $f(x_1)<f(x_2)$, siempre que x_1 y x_2 estén en I y $x_1<x_2$

ii) f es **decreciente** en I si $f(x_1)>f(x_2)$, siempre que x_1 y x_2 estén en I y $x_1>x_2$

iii) f es **constante** en I si $f(x_1)=f(x_2)$, siempre que x_1 y x_2 estén en I

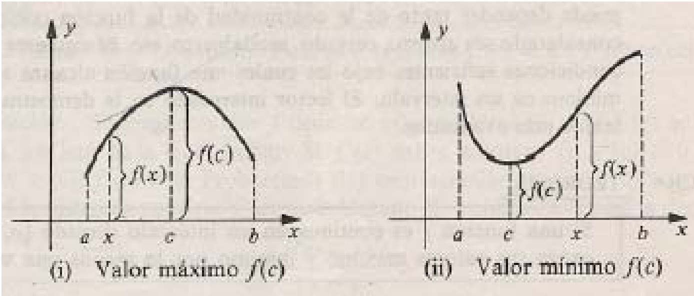


(i.) Función creciente *Figura 4.2* (ii.) Función decreciente

Si una función es creciente, entonces su gráfica sube a medida que x aumenta, (figura 4.2i) . Si la función es decreciente, entonces su gráfica baja a medida que x aumenta (figura 4.2ii)

Definición:

Si una función está definida en un intervalo I y c es un número en I, entonces
i) f(c) es el valor máximo de f en I si f(x) ≤ f(c) para todo x en I.
ii) f(c) es el valor mínimo de f en I si f(x) ≥ f(c) para todo x en I.



Los valores máximos ó mínimos de f se llaman valores extremos o simplemente extremos de f. Cuando f es una función constante, entonces para todo número real c, f(c) Es a la vez un número máximo y mínimo.

Teorema:
Si una función f es continua en un intervalo [a,b], entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo por lo menos una vez en el intervalo.

Los valores extremos se llaman también valor mínimo absoluto y valor máximo absoluto de f en un intervalo. También nos interesan los valores extremos locales.

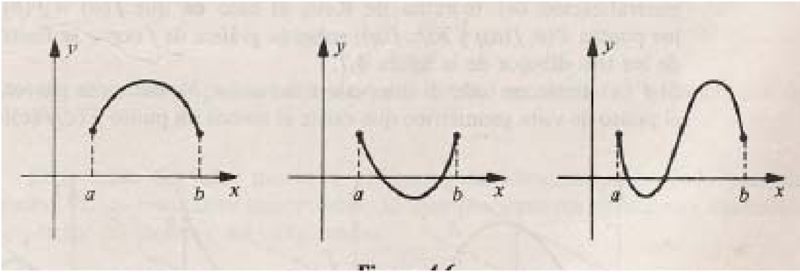
Definición
Sea c un número en el dominio de una función f
i) f (c) es un máximo local de f si existe un intervalo abierto (a,b) que contiene a c tal que f(x)≤ f(c) para toda x en (a,b)
ii) f(c) es un mínimo local de f si existe un intervalo abierto (a,b) que contiene a c tal que f(x)≥ f(c) para toda x en (a,b).

Teorema:
Si una función f es continua en un intervalo [a,b], y toma su máximo o su mínimo en un número c del intervalo (a,b) , entonces f'(c) = 0 o f' (c) no existe.

Un número c en el dominio de una función f es un número crítico de f, si f' (c) =0 ó f'(c) no existe.

Teorema de Rolle
En muchas ocasiones es muy difícil encontrar los números críticos, porque la existencia de los números críticos no está garantizada, por lo que el Teorema de Rolle da la condiciones para que la existencia de un número crítico. A continuación se enuncia el teorema:

Si una función f es continua en [a.b] y derivable en (a,b) y f(a) = f(b) , entonces existe al menos un número c en (a,b) tal que f'(c) = 0



El criterio de la primera derivada

Sea f una función que es continua en [a,b] y derivable en (a,b) :
i) Si f'(x)> 0 para toda x en (a,b), entonces f es creciente en [a,b]
ii) Si f'(x)< 0 para toda x en (a,b), entonces f es decreciente en [a,b]

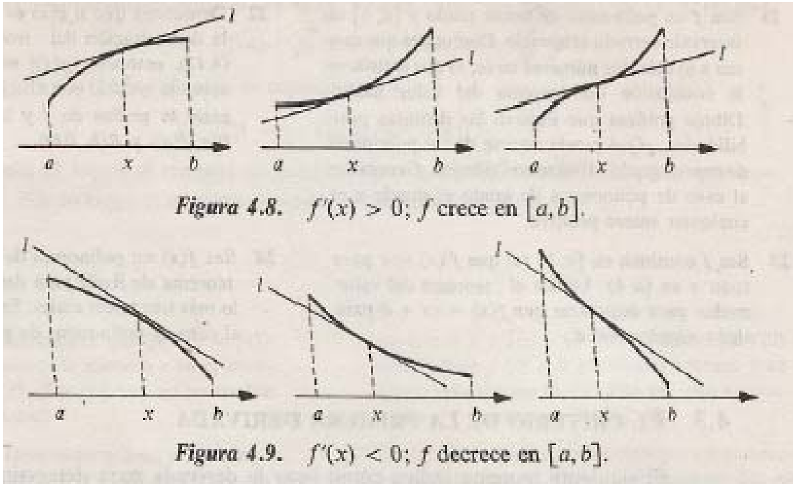
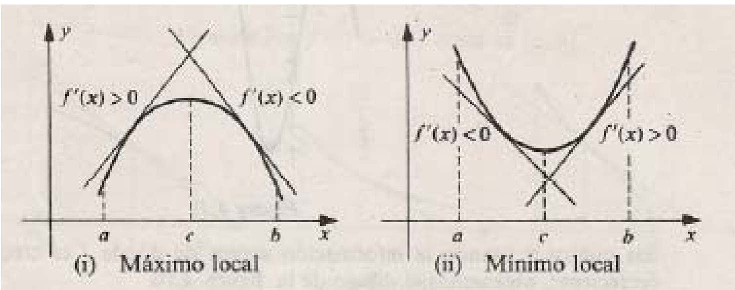


Figura 4.8. $f'(x) > 0$; f crece en $[a, b]$.

Figura 4.9. $f'(x) < 0$; f decrece en $[a, b]$.

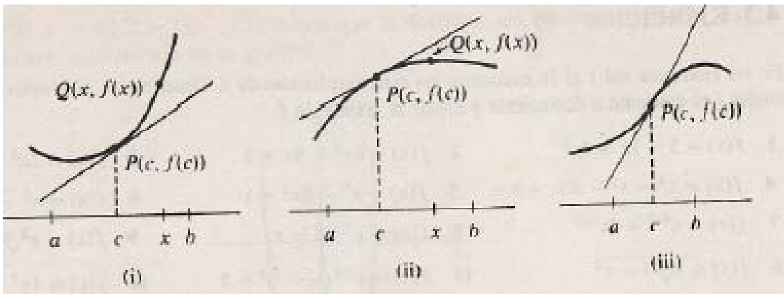
Supongamos que c es un número crítico de una función f y (a,b) es un intervalo abierto que contiene a c. Supongamos además que f es continua en [a,b] y derivable en (a,b), excepto posiblemente en c.

i) Si f'(x)> 0 para a<x<c y f'(x) <0 para c<x<b, entonces f (c) es un máximo local en c.
ii) Si f'(x)< 0 para a<x<c y f'(x) >0 para c<x<b, entonces f (c) es un mínimo local en c.
iii) Si f'(x)> 0 ó f'(x)< 0 para toda x en (a,b), excepto posiblemente para x=c, entonces f (c) no es un extremo local de f.



Definiciones y análisis de concavidad y de puntos de inflexión de una curva.

El concepto de concavidad es útil para describir la gráfica de una función derivable f. Si f’(c) existe, entonces f, tiene una recta tg en el punto P (c, f (c) con pendiente f’(c).



Prueba de la concavidad:
Sea f una función derivable en un intervalo abierto que contiene a c, entonces la gráfica tiene:

i) Concavidad hacia arriba si f’’(c) >0
ii) Concavidad hacia abajo si f’’(c) <0

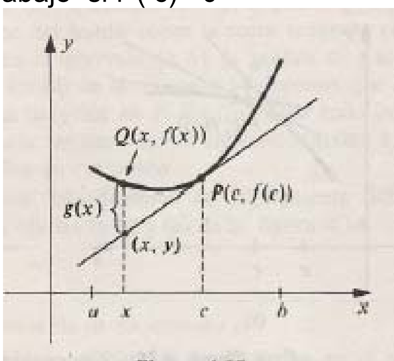
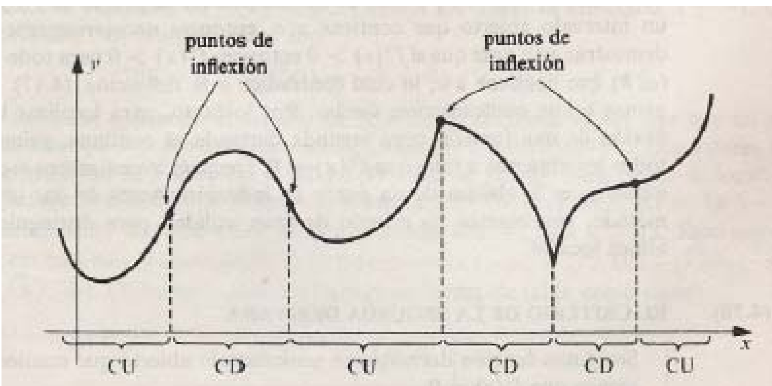


Figura 4.17

Un punto P (c, f(c)) sobre la gráfica de un función f es un punto de inflexión si existe un intervalo (a,b) que contiene a c tal que una de las afirmaciones se cumple:
i) f ``(x)> 0 si a<x<c y f ‘’(x) <0 si c<x<b ó
ii) f ``(x)< 0 si a<x<c y f ‘’(x) >0 si c<x<b ó



Obtención de máximos y mínimos con el criterio de una segunda derivada.

Criterio de la segunda derivada

Sea f una función derivable en un intervalo abierto que contiene a c. Supongamos que f' (c) = 0
i) Si f '' (c) < 0 entonces f tiene un máximo local en c
ii) Si f '' (c) > 0 entonces f tiene un mínimo local en c

Saber Hacer en la practica (7 hrs.)

Aplicar la primera y segunda derivada en problemas para la obtención de máximos y mínimos en problemas prácticos

a. Sea f(x) = x^3 +x^2 -5x-5. Encuentre aquellos intervalos en los cuales f es creciente o decreciente. Dibuje la gráfica de f.

Derivando f(x) obtenemos: f'(x) = 3x^2 +2x-5 = (3x+5)(x-1).

Primero se escuentran los intervalos en donde f'(x) > 0 o donde f'(x) < 0, para esto se hallan los puntos críticos:

3x+5 = 0 $\rightarrow$ x= -5/3

x-1 = 0 $\rightarrow$ x=1

Entonces los puntos críticos son -5/3 y 1, por lo que surgen los siguientes intervalos $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right),\left(-\frac{5}{3}.1\right),(1,\infty)$. Para tomar en cuenta todos los signos, se sugiere presentar de manera tabulada el comportamiento de los signos de la función y de la primera derivada:

Intervalo	(3x+5)	(x-1)	f' (x)	f
$\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)$	-	-	+	Creciente $\left[-\infty,-\frac{5}{3}\right]$
$\left(-\frac{5}{3},1\right)$	+	-	-	Decreciente $\left[-\frac{5}{3},1\right]$
$(1,\infty)$	+	+	+	Creciente $[1,\infty]$

Para graficar, f(x) podemos reescribirla de la siguiente manera:

$$f(x) = x^2(x+1) - 5(x+1) = (x^2-5)(x+1)$$

por lo tanto las intersecciones de su gráfica con el eje x tiene abcisas $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ y -1. La intersección con el eje y tiene ordenada f(0)= -5. Los números correspondiente a los puntos críticos son (-$\frac{5}{3}$,$\frac{40}{27}$) y (1,-8) y con estos datos graficamos f(x).

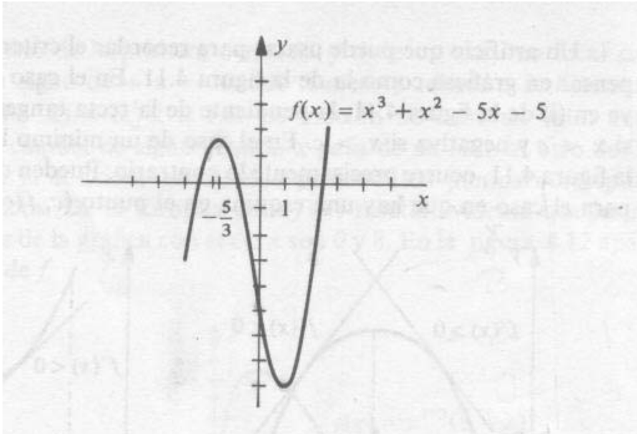


Figura 4.10

b. Sea f(x)= 12 $+2x^2-x^4$, utilice el criterio de la segunda derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de f. Discuta la concavidad, encuentre los puntos de inflexión y dibuje la gráfica de f.

Comenzamos calculando la primera y la segunda derivada y factorizamos:

$f'(x)=4x-4x^3 = 4x(1-x^2)$
$f''(x) = 4-12x^2= 4(1-3x^2)$
Con la primera derivada calculamos los puntos críticos:
$4x(1-x^2)=0$
$4x= 0 \rightarrow x=0$
$1-x^2=0\rightarrow (1-x)(1+x)=0 \rightarrow x=1,x=-1$
Por lo tanto los puntos críticos son -1,0,1.
Los valores de f'' en estos números son:
f(-1)= -8 <0, f(0)=4>0, f(1)=-8<0 .

Por lo tanto, aplicando el criterio de la segunda derivada, se observa que hay un mínimo local en 0 y dos máximos locales, uno en 1 y otro en -1. Los valores correspondientes de f son f(0) = 12, y f(1) =13= f(-1). Para localizar a los puntos de inflexión, resolvemos la 0, es ecuación f''(x)=decir, $(1-3x^2)=0$ y las soluciones para esta ecuación son $-\frac{\sqrt{3}}{3}\, y\, \frac{\sqrt{3}}{3}$. Esto sugiere que examinemos los signos en los intervalos que se forman a partirde los puntos críticos. Los intervalos son: $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$. Tabulando:

Intervalo	f''(x)	Concavidad
$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	-	Hacia abajo
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	+	Hacia arriba

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$	-	Hacia abajo

Como el signo de f''(x) cambia cuando x aumenta y rebasa a $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$, los puntos correspondientes sobre la gráfica son $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{113}{9}\right)$ son puntos de inflexión. Estos son los puntos donde la inflexión cambia, como se muestra en la figura.

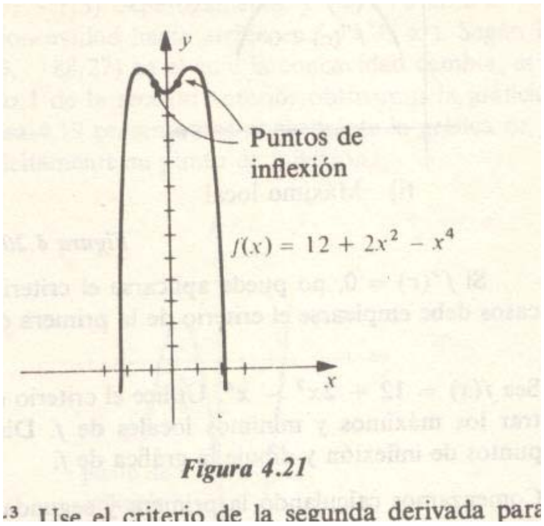


Figura 4.21

<u>Resolver las prácticas de la Guía de Prácticas de la asignatura.</u>

V

Integrales definidas

Objetivo particular de la unidad
Identificar y aplicar diferentes métodos de integración

Habilidades por desarrollar en la unidad
Evaluar a la integral y aplicarla a problemas

V.1 INTEGRALES DEFINIDAS.

Saber en la Teoría (3 hrs.)

Enunciado del teorema fundamental del cálculo.

Sea f es continua en un intervalo $[a,b]$:

I. Si se define G como $G(x)=\int_a^x f(t)dt$, para toda x en $[a,b]$, entonces G es una antiderivada de f en $[a,b]$.

II. Si F es una antiderivada de f, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

El Teorema fundamental del cálculo nos ayuda a evaluar a la integral definida sin utilizar límites de sumas, pero lo más importante y razón por lo que se le denomina fundamental, es porque muestra la conexión entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Definición de la integral definida

Sea f una función definida en el intervalo $[a,b]$, entonces la integral definida de f de a hasta b, está dada por $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(ci)\Delta xi$, si el límite existe

Interpretación geométrica de la integral definida

Si f(x)$\geq$ 0, para toda x en $[a,b]$, entonces G(x) es el área bajo la gráfica de f entre a y x, como se ilustra en la figura 5.12. si h> 0, entonces la diferencia G(x+h) – G(x) es el área bajo la gráfica de f entre x y x+h, el número h es la longitud del intervalo $[x,x+h]$ y f(x) es la ordenada de aquel punto de la gráfica de f cuya abcisa es x, entonces $\frac{[G(x+h)-G(x)]}{h} = f(z)$, donde z está entre x y x+h, por lo que si h$\rightarrow$0, entonces z$\rightarrow$x y f(z) $\rightarrow$f(x).

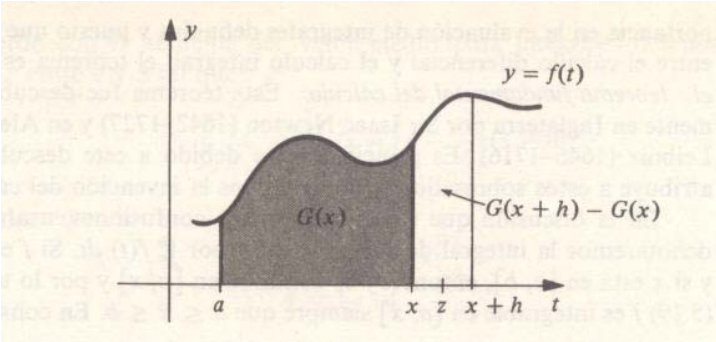


Figura 5.12

Integración de funciones fundamentales algebraicas, trascendentes trigonométricas y trigonométricas inversas

Para poder resolver cualquier integrar, primero es necesario entender que es una integral.

Una función F se llama antiderivada de una función f, en un intervalo I, si F'(x)= f(x), para todo valor de x en I.

Ejemplo: Sea f(x)= 4x $\rightarrow$F(x) = 2x^2, ya que f'(x)= 4x =f(x)

Si en una función f, F es una antiderivada particular y G es otra antiderivada particular de la misma función, la diferencia entre ambas es una constante, es decir, F(x) = G(x)+ Cte.

La operación inversa de calcular la diferencial de una función, consiste en hallar la función más general de la diferencial dada. Esta operación inversa se denomina antidiferenciación y se representa por $\int$, entonces con este nuevo concepto resolvamos el ejemplo anterior

$$\int 4x dx = 2x^2 + C\,.$$

El concepto de antidiferenciación comúnmente se le denomina integración. La integral puede ser definida o indefinida y esta última nos proporciona la antiderivada más general.

Para poder resolver las integrales se utilizan los siguientes teoremas básicos:

1. $\int dx = x + C$

2. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \quad donde\ a = cons\tan te$

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

4. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Una de las aplicaciones de la integral definida es encontrar área entre curva o curvas. La fórmula para hallar áreas entre dos curvas: A= $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

Otra aplicación es hallar volúmenes a través de sólidos de revolución, que se genera cuando gira una región alrededor de una recta. La fórmula es $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2$ cuando es una sola región, ahora cuando son dos regiones a considerar la fórmula es $V = \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx$

Saber Hacer en la practica (7 hrs.)

Aplicar la integración a diferentes tipos de funciones e interpretar el resultado

(a) $\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C \qquad (n = 3)$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C$

$\displaystyle = -\frac{1}{x} + C \qquad (n = -2)$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-1/2}\,dt = \frac{t^{-1/2+1}}{(-\frac{1}{2}+1)} + C = 2\sqrt{t} + C \qquad (n = -\tfrac{1}{2})$

(d) $\displaystyle\int dx = \int 1\,dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C \qquad (n = 0)$

... de fórmulas que dan antiderivadas de funciones simples aparecen

V.1 METODOS DE INTEGRACION.

Saber en la Teoría (4 hrs.)

Integración por cambio de variable, sustitución trigonométrica

Llamaremos cambio de variable o método de sustitución al método de hallar integrales indefinidas mediante la siguiente fórmula:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

El método de sustitución consiste principalmente en buscar una función u=g(x) con un diferencial g'(x)dx que aparezca en la integral original. El resto del integrando debe ser una simple función de u.

Integración por partes

Este método se utiliza con el objeto de evaluar una integral cuyo integrando consiste de un producto de funciones. La fórmula a utilizar es $\int udv = uv - \int vdu$.

Esta fórmula expresa la integral del producto f(x)g(x) en términos de la integral del producto f'(x)G(x). Es útil porque en muchos casos la integral de f'(x)G(x) es más fácil de evaluar que la integral del producto original f(x)g(x).

Es importante realizar la elección correcta de f(x) y g(x) al expresar el integrando original como un producto.

Saber Hacer en la practica (6 hrs.)

Aplicar la integral en la solución de problemas geométricos, electrónicos y eléctricos

Evalúe $\int (x^2 + 3x - 7)^5(2x + 3)\,dx$.

Observamos que la diferencial de $x^2 + 3x - 7$ es igual a $(2x + 3)\,dx$, que aparece en la integral. Por tanto, hacemos $x^2 + 3x - 7 = u$. Luego, $(2x + 3)\,dx = du$. Usando esta sustitución, la integral se reduce a

$$\int (x^2 + 3x - 7)^5(2x + 3)\,dx = \int u^5\,du = \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{1}{6}(x^2 + 3x - 7)^6 + C$$

en donde sustituimos el valor de u otra vez.

Evalúe $\int xe^{2x}\,dx$.

Elijamos $f(x) = x$ y $g(x) = e^{2x}$, de modo que la integral dada tiene la forma $\int f(x)g(x)\,dx$. Se sigue que $f'(x) = 1$ y $G(x)$, la integral de $g(x)$, está dada por $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, en donde C_1 es una constante de integración. Sustituyendo estas expresiones en la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx.$$

$$\int xe^{2x}\,dx = x(\tfrac{1}{2}e^{2x} + C_1) - \int (1)(\tfrac{1}{2}e^{2x} + C_1)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}xe^{2x} + C_1x - \tfrac{1}{2}\int (e^{2x} + 2C_1)\,dx$$

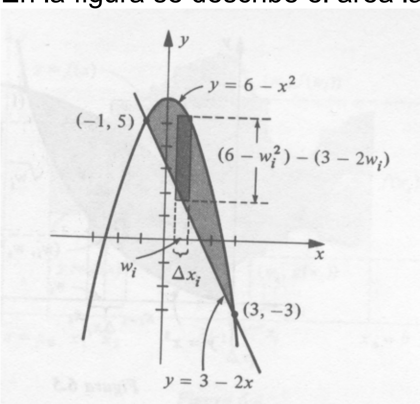
$$= \tfrac{1}{2}xe^{2x} + C_1x - \tfrac{1}{4}e^{2x} - C_1x + C$$

$$= \tfrac{1}{4}(2x - 1)e^{2x} + C$$

en donde otra vez C es una constante de integración.

Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y + x^2 = 6$ y $y + 2x - 3 = 0$

En la figura se describe el área la región que comprenden estas dos curvas y rectángulo



típico. Los puntos de intersección de las gráficas son (-1,5) y (3,-3), se pueden encontrar resolviendo simultáneamente ambas ecuaciones. Despejando y en ambas ecuaciones ,obtenemos:

$y=6-x^2 \quad = \; f(x)$

$y = 3-2x = g(x)$

Aplicando la fórmula del área

A= $\int_{-1}^{3}\left[\left(6-x^2\right)-\left(3-2x\right)dx\right]=\frac{32}{3}u^2$

<u>Resolver las prácticas de la Guía de Prácticas de la asignatura.</u>

Guía de Prácticas

Prácticas de la unidad 1

PRÁCTICA No. _1_

Fecha			Grupo
No de alumnos por práctica	3	No. de alumnos por reporte	3
Nombre y firma del profesor			
Nombre (s) del alumno (s)			
Tiempo estimado	1.5	Hrs	Calificación

1. Objetivo.
El alumno aplicará los teoremas de las funciones.

2. Materiales y/o equipos.
Hojas en blanco, lápiz, teoremas sobre operaciones con funciones.

3. Desarrollo general.
Hallar (f + g) (x), (f - g) (x), (f * g) (x), (f / g) (x)

$f(x) = \sqrt{2x} + 1$ $g(x) = x^2 + 3$

4. Resultados y conclusiones de la práctica por parte del alumno.

Guía de Prácticas

Prácticas de la unidad 2

PRÁCTICA No. 2

Fecha			Grupo
No de alumnos por práctica	3	No. de alumnos por reporte	3
Nombre y firma del profesor			
Nombre (s) del alumno (s)			
Tiempo estimado	1.5	Hrs	Calificación

1. Objetivo.
El alumno aplicará los teoremas de las límites y continuidad.

2. Materiales y/o equipos.
Hojas en blanco, lápiz, teoremas sobre límites y continuidad

3. Desarrollo general.
Hallar $\lim_{x \to -3} f(x)$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 - 3x} & \text{si } x < -3 \\ \sqrt[3]{x+2} & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$

Discuta la continuidad de f suponiendo que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 4}$

4. Resultados y conclusiones de la práctica por parte del alumno.

Guía de Prácticas

Prácticas de la unidad 3

PRÁCTICA No. 3

Fecha			Grupo
No de alumnos por práctica	3	No. de alumnos por reporte	3
Nombre y firma del profesor			
Nombre (s) del alumno (s)			
Tiempo estimado	1.5	Hrs	Calificación

1. Objetivo.

El alumno aplicará los teoremas de las derivadas. Analizará el comportamiento de fenómenos físicos

2. Materiales y/o equipos.

Hojas en blanco, lápiz, teoremas sobre derivadas. apóyese en las leyes de caída libre y teniendo en cuenta que la velocidad después de t segundos es $\frac{ds}{dt}$, donde s es la distancia y t el tiempo.

3. Desarrollo general.

Un cuerpo cae bajo la acción de la gravedad desde una posición de reposo a una distancia de $s = 16t^2$, a los t segundos. Calcule su aceleración.

4. Resultados y conclusiones de la práctica por parte del alumno.

Guía de Prácticas

Prácticas de la unidad 4

PRÁCTICA No. _4_

Fecha			Grupo
No de alumnos por práctica	3	No. de alumnos por reporte	3
Nombre y firma del profesor			
Nombre (s) del alumno (s)			
Tiempo estimado	1.5	Hrs	Calificación

1. Objetivo.
Utilizar la derivada en la solución de problemas de optimización.

2. Materiales y/o equipos.
Hojas en blanco, lápiz, teoremas sobre derivadas. Resuelve el siguiente problema utilizando la primera derivada y que la cantidad a minimizar está expresada en función de dos variables

3. Desarrollo general.

Se ha de construir un tanque con base cuadrada horizontal y lados rectangulares verticales. No tendrá tapa. El tanque deberá contener $4m^3$ de agua como capacidad. El material con el que se construirá el tanque tiene un costo de \$ 10.00 por m^2 ¿Qué dimensiones del tanque minimizan el costo del material?

4. Resultados y conclusiones de la práctica por parte del alumno.

Guía de Prácticas

Prácticas de la unidad 5

PRÁCTICA No. _5_

Fecha			Grupo
No de alumnos por práctica	3	No. de alumnos por reporte	3
Nombre y firma del profesor			
Nombre (s) del alumno (s)			
Tiempo estimado	1.5	Hrs	Calificación

1. Objetivo.

Utilizar la integral definida para calcular el área bajo una curva en un intervalo dado.

2. Materiales y/o equipos.

Hojas en blanco, lápiz, teoremas sobre integrales indefinidas y definidas.Fórmula dele área

3. Desarrollo general.

Grafica y determinar el área de la región delimitada por la curva $y = x^2 - 4x$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$

4. Resultados y conclusiones de la práctica por parte del alumno.

Bibliografía

1 Càlculo con geometría analìtica
Earl W. Swokowski
Grupo Editorial Iberoamèrica
2a Edición

2 El càlculo con geometría analìtica
Louis Leithold
Editorial
4a Edición

3 Matemàticas aplicadas a la administración y a la economìa
Jagdish C. Arya/ Robin W. Lardner
Pearson Educaciòn
3ª. Edición