Matemáticas I

Manual de asignatura

Sistema de Universidades Tecnológicas

ELECTRICIDAD Y ELECTRÓNICA INDUSTRIAL

Programa 2004

Créditos

Elaboró: IQI. Angélica Esther Herrera Lugo
Ing. Alma Ravell Pech

Revisó:

Colaboradores:

Autorizó:

Contenido

Objetivo general
Aplicar el álgebra lineal para modelar y analizar problemas de ingeniería.

Habilidades por desarrollar en general
Resolver problemas de ingeniería utilizando diversos métodos del álgebra lineal.

I
Ecuaciones lineales

Objetivo particular de la unidad
Analizar y solucionar ecuaciones lineales

Habilidades por desarrollar en la unidad
Diferenciar y solucionar ecuaciones lineales

I.1 DEFINICION Y SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES

Saber en la Teoría (4)
Definición de una ecuación.
Definición de linealidad y una ecuación lineal.
Determinar la solución de una ecuación lineal.
Representar y analizar la gráfica de una ecuación lineal.

Expresión algebraica es una sucesión de términos constituidos de números y letras, cada término es separado del otro por un signo "+" ó "-"

Ejemplos: $-a$ $-5x$ $4a^2$ $(a + b)c$ $\frac{(5x - 3y)}{x^2}$

Igualdad es la expresión de que dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor.

Ejemplos: $a = b + c$ $3xx = 4x + 15$ $y = 2x + 3$

Ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas en las que intervienen una o más letras, llamadas *incógnitas o variables* cuyo valor hay que averiguar y que solo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas. Una ecuación se escribe utilizando el signo "=" entre las cantidades iguales, por tanto, una ecuación se divide en dos miembros, el izquierdo y el derecho.
Las incógnitas se representan por las letras del alfabeto, usualmente se utilizan las últimas x, y, z, u, v, w.

De manera que, $5x + 2 = 17$

Es una ecuación, porque es una igualdad en la que hay una incógnita, la x, y esta igualdad sólo se verifica o sea que solo es verdadera, para el valor de $x = 3$.

$$5\,(3) + 2 = 17$$
$$17 = 17$$

Clases de ecuaciones

Las ecuaciones se pueden clasificar de acuerdo al grado de la expresión:

i) Primer grado: son aquellas en las que la(s) incógnita(s) tiene(n) exponente es 1. También se les llama *simples o lineales.*
Ejemplos: $4x – 6 = -1$, $x + 3y = 2x – y + 1$

ii) Segundo grado o cuadráticas: son aquellas ecuaciones cuyo mayor exponente en una o más incógnitas es 2.
Ejemplos: $2x^2 + 7 = 0$, $xy – x^2 + y^2 = 5$

La **solución de una ecuación** es hallar sus raíces, o sea, el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen las ecuaciones. La totalidad de las soluciones es llamada el conjunto de soluciones.

Una ecuación puede tener ninguna, una o varias soluciones.

Ejemplos: $5x – 9 = 1$ es una ecuación con una incógnita con una solución, $x = 2$

$x^2 – 4 = 0$ es una ecuación con una incógnita con dos soluciones, $x_1 = + 2$ y $x_2 = - 2$

$2x + 3y = 15$ es una ecuación con dos incógnitas que tiene infinitas soluciones, algunas de las cuales son $x = 0$, $y = 5$; $x = 3$, $y = 3$; $x = 30$, $y = -15$.

En la resolución de ecuaciones se consideran los siguientes argumentos algebraicos:

a) La transposición de términos consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro:

Sea la ecuación
$$5x + 3 = 2$$

El término 3 se puede cambiar a otro lado, quedando
$$5x = 2a – b$$

b) Los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación varíe:

Sea la ecuación
$$- 4x = - 8$$

Con un cambio de signos la ecuación queda:
$$4x = 8$$

Gráfica de una ecuación lineal

El término lineal proviene de la palabra línea. La ecuación de una línea recta en el plano (x, y) es cualquier ecuación que puede escribirse en la forma:

$$ax + by = c$$

donde x, y son incógnitas y a, b, c son constantes.

Dos líneas rectas x, y que se cortan en el punto 0 formando ángulo recto (Fig 1.) constituyen un sistema de ejes coordenados rectangulares. La línea x se llama **eje de las x** o **eje de las abscisas** y la línea y se llama **eje de las y** o **eje de las ordenadas**. El punto **0** se **llama origen de coordenadas**.

Los ejes dividen al plano del papel en cuatro partes llamadas cuadrantes (I,II,II y IV). El origen o divide cada eje en dos semi-ejes, uno positivo (cuadrantes I y IV) y otro negativo (cuadrantes II y III). Cualquier distancia medida sobre el eje de las x de 0 hacia la derecha es positiva y de 0 hacia la izquierda es negativa. Cualquier distancia medida sobre el eje de las y de 0 hacia **arriba** es **positiva** y de 0 hacia **abajo** es **negativa**.

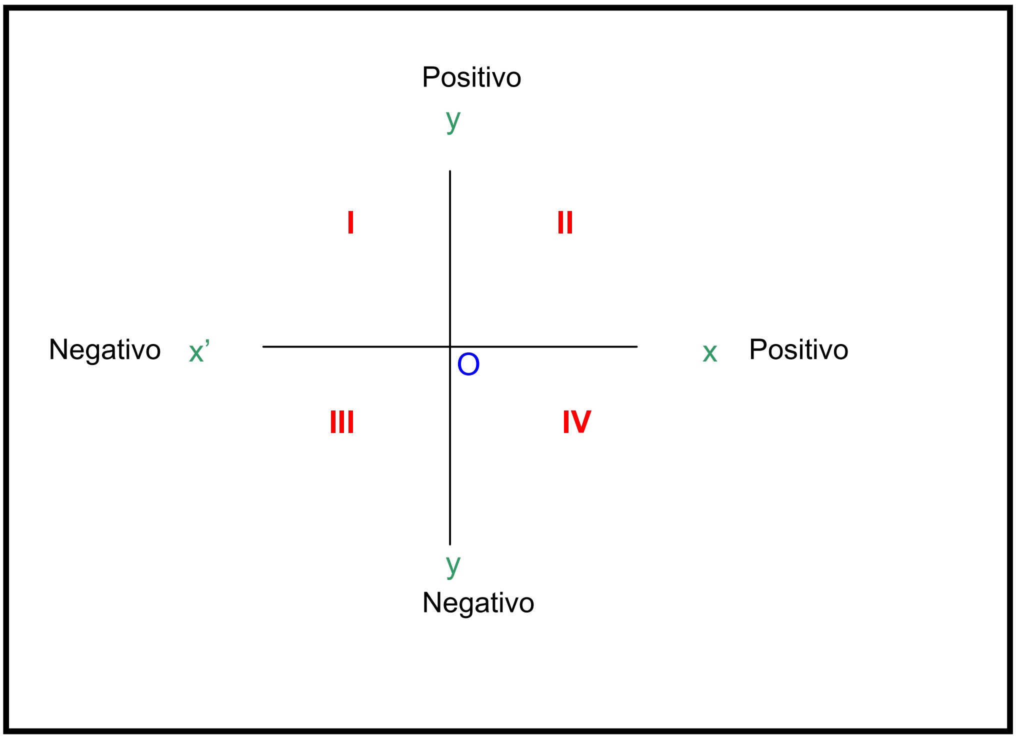


Figura 1. Sistema de ejes coordenados rectangulares.

Saber Hacer en la practica (5)

Resolución de problemas prácticos donde resultan ecuaciones lineales

Para determinar el grado de una ecuación se requiere verificar el mayor exponente de las incógnitas o variables.

Ejemplos:

i) Determinar el grado de la siguiente ecuación

$$3x^2 – 2 = 2x$$

Incógnita: x
Mayor exponente: 2
Grado: 2

ii) Determinar el grado de la siguiente ecuación

$$x – y = 2x – 6y + 9$$

Incógnitas: x, y
Mayor exponente: 1
Grado: 1 (ecuación lineal)

EJERCICIO 1

Indique cuales ecuaciones en la siguiente tabla son lineales y no lineales

ECUACION	ES LINEAL	NO ES LINEAL
1. $2x – 3y = 0$		
2. $x^2 + y^2 = 1$		
3. $z = 5-3x + ½ y$		
4. $x_1-x_2-x_d = 6$		
5. $x^2+3 = y^2$		

Pasos generales para la resolución de ecuaciones lineales:

1. Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.
2. Se hace la transposición de términos, reuniendo en un miembro todos los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro todas las cantidades conocida.
3. Se reducen términos semejantes en cada miembro.
4. Se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Ejemplos:

1) Resolver la ecuación $9y – 11 = -10 + 12y$

Pasando 12y al primer miembro y -11 al segundo miembro con los respectivos cambios de signo tenemos:

$$9y - 12y = -10 + 11$$

Reduciendo los términos

$$-3y = 1$$

Despejando la incógnita

$$y = -1/3$$

Verificando la respuesta

$$9(-1/3) - 11 = -10 + 12\,(-1/3)$$
$$-3 - 11 = -10 - 4$$
$$-14 = -14$$

2) Resolver la ecuación $x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3)$

Eliminando los signos de agrupación

$$x - 2x - 1 = 8 - 3x - 3$$

Pasando todos los términos con x al primer miembro y los términos independientes al segundo miembro, con los respectivos cambios de signo tenemos:

$$x - 2x + 3x = 8 - 3 + 1$$

Reduciendo los términos

$$2x = 6$$

Despejando la incógnita

$$x = \frac{6}{2}$$

Simplificando:

$$x = 3$$

Verificando la respuesta

$$(3) - 2(3) - 1 = 8 - 3(3) - 3$$
$$3 - 6 - 1 = 8 - 9 - 3$$
$$-4 = -4$$

3) Resolver la ecuación $3x - \frac{2x}{5} = \frac{x}{10} - \frac{7}{4}$

Pasando todos los términos con x al primer miembro y los términos independientes al segundo miembro, con los respectivos cambios de signo tenemos:

$$3x - \frac{2x}{5} - \frac{x}{10} = -\frac{7}{4}$$

Reduciendo los términos, utilizando el mínimo común múltiplo:

$$\frac{30x - 4x - x}{10} = -\frac{7}{4}$$

$$\frac{25x}{10} = \frac{-7}{4}$$

Despejando la incógnita

$$x = \frac{-7(10)}{4\,(25)}$$

Simplificando:

$$x = -\frac{7}{10}$$

Existen problemas expresados con palabras que conducen a ecuaciones lineales, las cuales al resolverse originan la respuesta de dicho problema.
La ecuación en cada problema se encuentra a partir de las relaciones descritas entre los números conocidos y los número desconocidos.

Pasos generales para la resolución de problemas que emplean ecuaciones lineales:

1. Leer varias veces el problema, hasta comprender con claridad cuales son los datos proporcionados y cuales son las variables que se requieren obtener.
2. Expresar cada número desconocido en términos de una sola letra.
3. Encontrar las cantidades, que comprenden a los datos proporcionados y a las variables a obtener que resultan en una igualdad. Formar la ecuación con esta igualdad.
4. Resolver la ecuación y verificar el resultado.

Ejemplos:

1) La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en 8. hallar los números.

Sea x = numero mas pequeño.
Entonces: $x + 8$ = numero mas grande.
La suma de ambos números es:

$$x + x + 8 = 106$$

Resolviendo la ecuación:

$$2x + 8 = 106$$

$$x = \frac{106 - 8}{2}$$

$x = 49$, numero menor
$x + 8 = 49 + 8 = 57$, numero mayor

2) La edad de Pedro es el triple de la de Juan y ambas edades suman 40 años. Hallar la edad de Pedro y Juan.

Sea J = edad de Juan
Entonces $3J$ = edad de Pedro
La suma de ambas edades es:

$$J + 3J = 40$$

Resolviendo la ecuación:

$$4J = 40$$
$$J = \frac{40}{4}$$
$$J = 10 \text{ años, edad de Juan}$$
$$3J = 3(10) = 30, \text{ edad de Pedro.}$$

3) Un padre pon 16 problemas a su hijo con la condición de que por cada problema que resuelva el muchacho recibirá \$12 y por cada problema que no resuelva perderá \$5. Después de trabajar en los problemas el muchacho recibe \$73. ¿Cuántos problemas resolvió y cuántos no resolvió?

Sea x = problemas resueltos
Entonces $16 – x$ = problemas no resueltos

El dinero por obtener es $12x$
Y el dinero perdido es $5(16 – x)$
El total recibido es $12x – 5(16 – x) = 73$

Resolviendo la ecuación:

$$12x – 80 + 5x = 73$$
$$17x = \frac{73 + 80}{17}$$
$$x = 9, \text{ problemas resueltos}$$
$$16 – x = 16 – 9 = 7, \text{ problemas no resueltos}$$

EJERCICIO 2

Encontrar el valor de la incógnita que hace válida cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $5x = 8x – 15$
2. $y – 5 = 3y – 25$
3. $5x + 6 = 10x + 5$
4. $21 – 6x = 27 – 8x$
5. $11x + 5x – 1 = 65x – 36$
6. $8x – 4 + 3x = 7x + x + 14$
7. $8x + 9 – 12x = 4x – 13 – 5x$
8. $15x – 10 = 6x – (x + 2) + (- x + 3)$
9. $(5 – 3x) – (-4x + 6) = (8x + 11) – (3x -6)$
10. $30x – (-x + 6) + (-5x + 4) = – (5x + 6) + (- 8 + 3x)$
11. $x + 3(x – 1) = 6 – 4(2x + 3)$
12. $5(x – 1) + 16(2x + 3) = 3(2x – 7) – x$
13. $\frac{x}{6} + 5 = \frac{1}{3} – x$
14. $\frac{3x}{5} – \frac{2x}{3} + \frac{1}{5} = 0$

15. $\frac{x}{2} + 2 - \frac{x}{12} = \frac{x}{6} - \frac{5}{4}$

16. $\frac{3x}{4} - \frac{1}{5} + 2x = \frac{5}{4} - \frac{3x}{20}$

17. $\frac{x-4}{3} - 5 = 0$

EJERCICIO 3

Resolver los siguientes problemas

1. Un alambre de 21 m se divide en dos partes, de tal modo que la longitud de una de ellas es las tres cuartas partes de la longitud de la otra. Hallar la longitud de cada parte.
2. Encontrar tres números enteros consecutivos cuya suma sea igual a 21.
3. Hallar dos números cuya suma sea 24 y cuya diferencia sea 6.
4. Un estudiante obtiene una calificación promedio de 86 por sus tareas y 75 en sus exámenes. ¿Cuál será la calificación de examen final que le dará un promedio total de 80 si la tarea cuenta 1/10, los exámenes parciales 6/10 y el examen final 3/10?
5. Cierto trabajo puede ser efectuado por A en 4 días, y por B en 6 días. ¿Cuánto tiempo necesitarán para hacer todo el trabajo juntos?

Representación de la gráfica de una ecuación lineal.

Para obtener la gráfica de una ecuación lineal, es decir de una línea recta, basta obtener dos puntos cualesquiera y unirlos por medio de una línea recta.
Si la función carece de término independiente, uno de los puntos es el origen, por tanto solo se requiere un punto adicional para unirlo y formar la línea recta.
Si la función tiene término independiente, es mas cómodo hallar las intersepciones con los ejes, haciendo x = 0 e y = 0, y unir los dos puntos que se obtienen.

Ejemplo:

Obtener la gráfica de la ecuación

$x + 3y = 6$

dado que la ecuación tiene término independiente, si x = 0 se obtiene:

$3y = 6$

$y = 6/3 = 2$

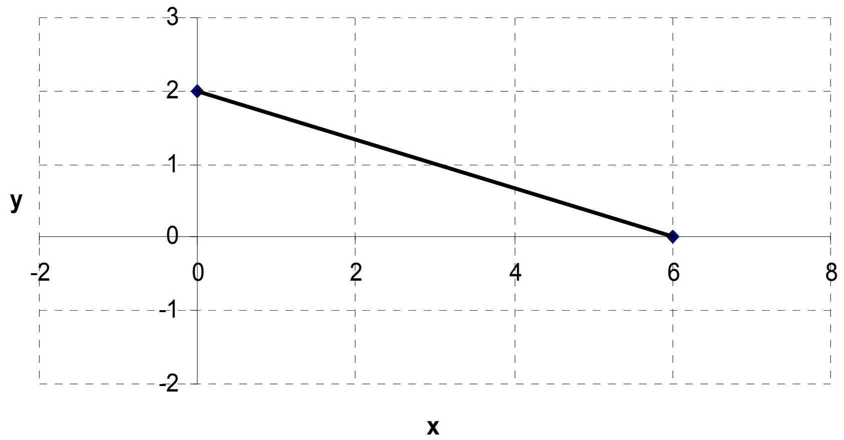
primer punto (0, 2)

si y = 0, se obtiene

$x = 6$

segundo punto (6, 0)

graficando los dos punto y uniéndolos:



EJERCICIO 4

Graficar las siguientes ecuaciones lineales.

1. $y = x$
2. $y = 2x - 4$
3. $2x = 3y$
4. $4x + y = 8$

II

Sistemas de ecuaciones

Objetivo particular de la unidad
Analizar y solucionar sistemas de ecuaciones lineales

Habilidades por desarrollar en la unidad
Diferenciar y solucionar ecuaciones lineales

II.1 DEFINICIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Saber en la Teoría (2)
Definición de un sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con soluciones comunes para todas las ecuaciones. Para indicar que varias ecuaciones forman un sistema, usualmente se abarca el conjunto de todas ellas con una llave.
Las ecuaciones de un sistema suelen tener dos o más incógnitas, por lo que cada una de ellas puede tener infinitas soluciones.
Se llama solución del sistema a una solución común a todas las ecuaciones que lo forman. Un sistema de ecuaciones puede tener soluciones o se puede concluir que no tiene ninguna solución. Los sistemas de ecuaciones que carecen de solución se llaman incompatibles y los que tienen solución, compatibles. Si dos sistemas de ecuaciones tienen las mismas soluciones o ambos carecen de solución, se dice que son equivalentes.
Un sistema de ecuaciones lineales compatible que tiene solución única se denomina determinado, si tiene infinitas soluciones es indeterminado.

Por ejemplo, el sistema formado por las ecuaciones $2x - 5y = 16$ y $4x + y = 10$ se expresa así

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $x = 3$, $y = -2$ porque es solución de ambas ecuaciones. Es, por tanto, un sistema compatible.

El siguiente sistema es incompatible, pues no tiene solución.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 2x - 5y = 4 \end{cases}$$

II.2 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LIENALES

Saber en la Teoría (2)
Método gráfico.
Métodos algebraicos: reducción, igualación y sustitución

Existen varios métodos elementales para resolver sistemas de ecuaciones: el método gráfico, el método de sustitución, el método de igualación y el método de reducción. A continuación se aplican en la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

El método gráfico consiste en dibujar las ecuaciones, si éstas se cortan, el sistema es compatible determinado y las coordenadas del punto de corte son la solución del sistema. Si las rectas son paralelas, el sistema es incompatible. Si las rectas son coincidentes (son la misma recta), el sistema es compatible indeterminado: sus soluciones son todos los puntos de la recta.

Ejemplo:
1. Resolver mediante el método gráfico el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y = 6$$
$$5x - 4y = 12$$

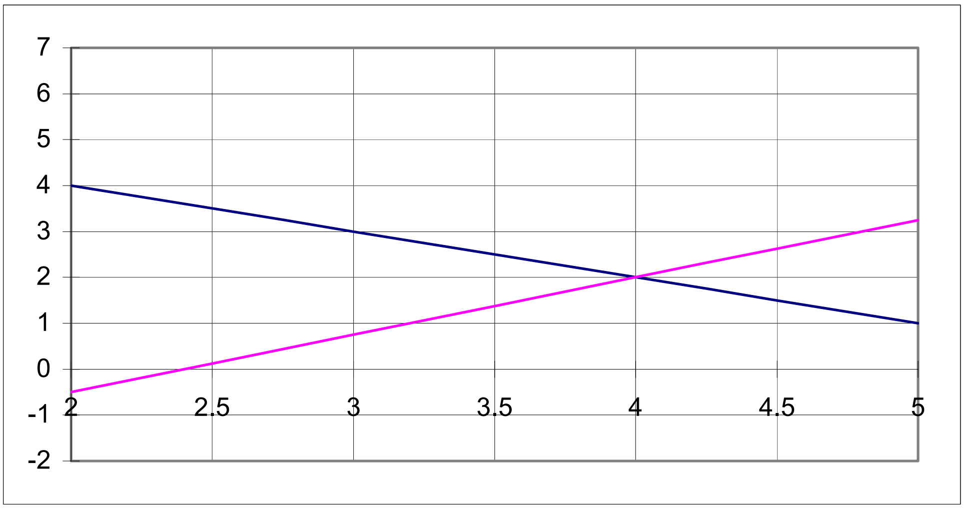
se obtienen las coordenadas de ambas ecuaciones y se grafican:

x+y=6

X	Y
0	6
6	0

5x-4y=12

X	Y
0	-3
12/5	0



Al realizar las gráficas se obtiene que éstas se cortan en el punto:
x = 4
y = 2

El método de sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir su expresión en la otra, la cual se transformará en una ecuación con una incógnita que se puede resolver. Una vez conocido el valor de dicha incógnita se obtiene, de inmediato, el valor de la otra.

Ejemplo:

1. Para resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$ por el método de sustitución conviene despejar la y de la segunda ecuación:

$y = 10 – 4x$

ahora se sustituye su valor en la primera ecuación

$2x - 5.(10 – 4x) = 16$

Se resuelve la ecuación resultante, pues sólo tiene una incógnita:

$$2x – 50 + 20x = 16$$
$$22x = 66$$
$$x = \frac{66}{22}$$
$$x = 3$$

Ahora el valor de x se sustituye en la expresión de y obtenida antes:

$y = 10 – 4x$
$y = 10 – 4 \cdot 3$
$y = 10 – 12$
$y = – 2$

Se ha obtenido así la solución x = 3, y = – 2.

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar sus expresiones, obteniendo así una ecuación con una incógnita. Una vez resuelta se obtiene fácilmente el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

1. Para resolver por igualación el sistema anterior, se puede despejar la x en ambas ecuaciones e igualar sus expresiones:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$$

despejamos x en cada una de las expresiones para igualarlas y, de esa manera, poder hallar el valor de y

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{16+5y}{2} \\ x = \dfrac{10-y}{4} \end{array}\right\} \dfrac{16+5y}{2} = \dfrac{10-y}{4} \Rightarrow 4(16+5y) = 2(10-y) \Rightarrow 64+20y = 20-2y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20y+2y = 20-64 \Rightarrow 22y = -44 \Rightarrow y = -44:22 \Rightarrow y = -2.$$

Por último, se sustituye el valor de y en alguna de las expresiones de x:

$$x = \frac{16+5y}{2} = \frac{16+5(-2)}{2} = 3$$

Se ha obtenido la solución x = 3, y = – 2.

El método de reducción consiste en procurar que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones para que, al restarlas miembro a miembro, se elimine dicha incógnita, dando lugar a una ecuación con sólo la otra incógnita. Se resuelve dicha ecuación y el valor de la incógnita se sustituye en una de las ecuaciones primitivas, y con ello se puede obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:
Para resolver por reducción el mismo sistema:

$$\begin{cases} 2x-5y=16 \\ 4x+y=10 \end{cases}$$

se multiplican los dos miembros de la primera ecuación por 2 con el fin de que el coeficiente de la x sea el mismo en ambas ecuaciones:

$4x - 10y = 32$
$4x + y = 10$

Ahora, restando miembro a miembro se obtiene la ecuación siguiente:

$-11y = 22$
$y = \dfrac{22}{-11}$
$y = -2$

Y se sustituye en una de las ecuaciones iniciales:

$2x - 5(-2) = 16$
$2x + 10 = 16$
$2x = 6$
$x = 3$

La solución es *x* = 3, *y* = -2.

Saber Hacer en la practica (5)

Resolución de problemas donde resultan sistemas de ecuaciones lineales.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

i) por el método gráfico:

a) $\begin{array}{l} 2x+y=8 \\ 2x+y=4 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} x+y=5 \\ x-y=1 \end{array}$

g) $\begin{array}{l} 3x=-4y \\ 5x-6y=38 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} 2x+y=8 \\ x-y=-2 \end{array}$

e) $\begin{array}{l} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{array}$

h) $\begin{array}{l} x+8=y+2 \\ y-4=x+2 \end{array}$

ii) por el método de sustitución

c) $\begin{array}{l} 2x+y=8 \\ 4x+2y=16 \end{array}$

f) $\begin{array}{l} 2x+3y=13 \\ 4x-y=5 \end{array}$

i) $\begin{array}{l} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=-\frac{1}{6} \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=-\frac{7}{12} \end{array}$

j) $\begin{array}{l} x-y=1 \\ x+y=7 \end{array}$

iii) por el método de igualación

l) $\begin{array}{l} \frac{3x}{5}+\frac{y}{4}=2 \\ x-5y=25 \end{array}$

m) $\begin{array}{l} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=-\frac{1}{6} \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=-\frac{7}{12} \end{array}$

n) $\begin{array}{l} 3x=-4y \\ 5x-6y=38 \end{array}$

ñ) $\begin{array}{l} x-2y=10 \\ 2x+3y=-8 \end{array}$

iv) por el método de reducción

o) $\begin{array}{l} 2x+y=-1 \\ x-2y=-13 \end{array}$

p) $\begin{array}{l} \frac{x-2}{2}-\frac{y-3}{3}=4 \\ \frac{y-2}{2}+\frac{x-3}{3}=0 \end{array}$

q) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

r) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

s) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 12x_3 &= 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 6x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

III

Determinantes

Objetivo particular de la unidad
Aplicar determinantes y sus propiedades en la solución de problemas prácticos.

Habilidades por desarrollar en la unidad
Solucionar problemas prácticos y sistemas de ecuaciones utilizando determinantes y sus propiedades.

III.1 DEFINICION DE DETERMINANTES

Saber en la Teoría (1)
Definición de los determinantes.

3.1.1 Definición de Determinantes

En un sistema de ecuaciones de 2x2 a el valor de $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ se le conoce como determinante.

Si hacemos una pequeña observación de los componentes que conforman el determinante del sistema de ecuaciones notaremos que lo conforman los coeficientes de las variables del sistema, por lo que podemos extraer solamente los coeficientes de las variables del sistema en forma de matriz y obtener su determinante. A este arreglo le llamaremos determinante A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Al determinante de A lo denotaremos por **det A** o por $|A|$.

$|A| = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ Determinante de 2x2.

Entonces:

Si $|A| \neq 0$ el sistema tendrá única solución.

Si $|A| = 0$ el sistema tendrá un número infinito de soluciones o no tendrá solución.

Otra manera de obtener el determinante de una matriz de 2x2 es la siguiente:
Dada:

$$(-a_{12}a_{21})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Podemos multiplicar en forma diagonal hacia abajo y en diagonal hacia

$$(a_{11}a_{22})$$

arriba con multiplicando por (-1).

Para poder obtener el determinante de una matriz de nxn tendremos que definir primero los términos de menor ij (M_{ij}), y de cofactor ij (A_{ij}). El subíndice i nos define el renglón y el subíndice j la columna.

$$A_{i,j}$$

renglón columna

Dada la matriz A de nxn.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{ij} \dots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición de menor
El menor i-j es la matriz que resulta de eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de la matriz A.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 8 & -7 & 4 \\ 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Encuentre los menores, M_{11}, M_{21}, M_{32}, M_{22}, M_{31}, M_{33}, M_{23}

$$M_{11} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad M_{21} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_{22} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} \qquad M_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Saber Hacer en la practica (2)

Operaciones sobre filas y columnas.

Definición de las operaciones con determinantes

1ª.) Si todos los elementos de una fila o columna de un determinante son ceros, el determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -2*0-0*4=0$$

2ª.) Al multiplicar una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$\begin{vmatrix} 2*3 & -1 \\ 2*2 & 5 \end{vmatrix} = 2*3*5+1*2*2 = 2(3*5+1*2) = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

4ª.) Si el determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, su valor es cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6-6=0$$

5ª.) Si la matriz tiene dos filas o dos columnas formadas por elementos proporcionales, su determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -6+6=0$$

6ª.) Si se intercambian entre sí dos filas o dos columnas de un determinante, el resultado es el mismo en valor absoluto, aunque con diferente signo.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -17$$

7ª.) Si una fila o columna esta formada por varios sumandos, su determinante equivale a la suma de tantos determinantes como sumandos tenga la línea.

$$7 = \begin{vmatrix} 3 & -1+4-2 \\ 2 & 5-3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 17-17+7 = 7$$

8ª.) Si una de las filas o columnas de un determinante es combinación lineal de otras, el valor del determinante es 0.

$$\begin{Vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & 6 & 2 \end{Vmatrix} = 0$$

Ya que la tercer fila se forma al multiplicar la segunda por 2 y sumarla a la primera.

9ª.) Si sustituimos una fila o columna de un determinante por una combinación lineal de otras, el valor de dicho determinante no varia.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Si restamos la tercer fila de la segunda, resulta:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Si ahora restamos la tercer columna de la segunda, obtendremos:

$$\begin{Vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Ahora bien:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Entonces el determinante no varia.

III.2 OPERACIONES CON DETERMINANTES

Saber en la Teoría (2)
Definición de las operaciones con determinantes: suma, resta y multiplicación.
Los teoremas de los determinantes.

Los teoremas de los determinantes.

Teorema 1: El determinante de una matriz A y el de su transpuesta A^T son iguales; o sea, $|A| = |A^T|$.

Teorema 2: Sea A una matriz cuadrada.

a) Si A posee una fila (columna) de ceros, necesariamente $|A| = 0$.
b) Si A posee dos filas (columnas) iguales, necesariamente $|A| = 0$.
c) Si A es triangular, esto es, A tiene sólo ceros por encima o por debajo de la diagonal, entonces $|A|$ es igual al producto de los elementos diagonales. De este modo, en particular, $|I| = 1$, siendo I la matriz identidad.

Teorema 3: Suponiendo que B se ha obtenido de A mediante una operación elemental entre filas (columnas)/

a) Si se han intercambiado dos filas (columnas) de A, $|B| = -|A|$.
b) Si se ha multiplicado una fila (columna) de A por un escalar k, $|B| = k|A|$.
c) Si se ha sumado un múltiplo de una fila (columna) a otra, $|B| = |A|$.

Teorema 4: Sea A cualquier matriz n-cuadrada. Son equivalentes las siguientes aserciones:

a) A es invertible, es decir, A tiene una inversa A^{-1}.
b) AX=0 tiene únicamente la solución trivial.
c) El determinante de A es no nulo esto es: $|A| \neq 0$.

Teorema 5: El determinante es una función multiplicativa. O sea, el determinante del producto de dos matrices A y B es el producto de los determinantes $|AB| = |A||B|$.

Teorema 6: Sea E una matriz elemental. En tal caso, para toda matriz A, $|EA| = |E||A|$.

Teorema 7: Suponiendo que A y B son matrices similares. Entonces $|A| = |B|$.

Saber Hacer en la practica (3)

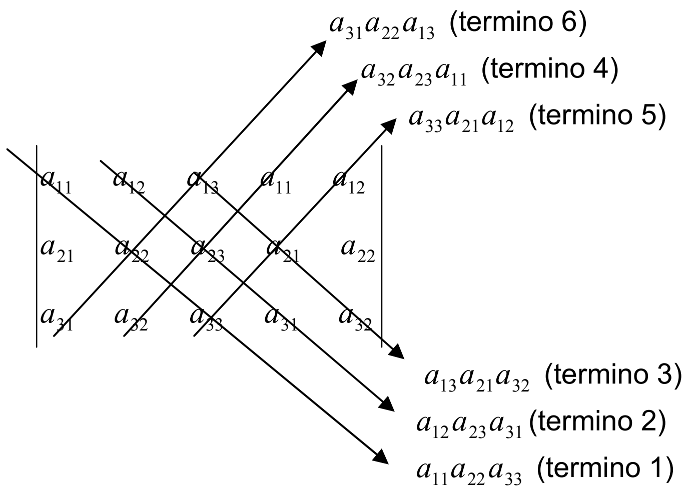
Resolución de problemas donde resultan sistemas de ecuaciones lineales.

Para calcular el valor de un determinante, se tiene el siguiente procedimiento:

Sea A el siguiente determinante de 3 x 3.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Enseguida agregamos las 2 primeras columnas al lado derecho y multiplicamos en forma diagonal hacia abajo y hacia arriba como se muestra.



Si comparamos los termino que se obtuvieron de estos productos con la formula que se desarrollo por cofactores encontramos que los términos 1, 2, y 3 son iguales y que los términos 4, 5 y 6 se diferencian solo por el signo negativo.

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

$$|A| = (ter \quad 1) + (ter \quad 2) + (ter \quad 3) - (ter \quad 4) - (ter \quad 5) - (ter \quad 6)$$

Conclusión: Para obtener el determinante de una matriz de **3 X 3** se agregan las primeras dos columnas del lado izquierdo de la matriz en el lado derecho de esta, enseguida se multiplica en forma diagonal hacia abajo y en forma diagonal hacia arriba pero cada termino lo multiplicamos por (-1) , la suma de todos estos términos nos da el determinante de A.

Ejemplo:
1. Obtenga el determinante de las siguientes matrices de 3 X 3.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & -135 & -24 & -42 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & \\ 7 & 9 & 1 & 7 & 9 & \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 6 & \\ & & & 72 & 9 & 210 \end{array}$$

$|B| = 90$

III.3 MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LIENALES CON DETERMINANTES

Saber en la teoría (1)
Método de Cramer
Método de Cofactores

Método o regla de Cramer

Es un método para resolver sistemas con el mismo número de incógnitas y de ecuaciones.

Sea

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{21n}x_n = b_2 \\ \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{pmatrix}$$

Un sistema de ecuaciones el cual puede ser escrito en la forma Ax = b. Supongamos que el det$\neq$0 entonces el sistema tiene una solución dada por x = $A^{-1} * b$. Se puede desarrollar un método para encontrar esa solución sin reducción por renglones y sin calcular A^{-1}.

Sea D = det A (el determinante de la matriz de los coeficientes de las variables)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{vmatrix}$$

Sea D_{x_j} el determinante de las siguientes matrices.

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_m & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{vmatrix} \qquad D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & b_m & \ldots a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$D_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots b_m \end{vmatrix}$$

Es decir D_{x_j} es el determinante de la matriz que resulta de sustituir la j-esima columna de A por b.

Entonces la solución del siguiente sistema esta dada por:

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \; x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \; x_3 = \frac{D_{x_3}}{D}, \ldots \; x_n = \frac{D_{x_n}}{D}$$

Ejemplos:

1. Resuelva el siguiente sistema por medio de la regla Cramer.

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \qquad Dx_1 = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -12 \qquad Dx_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18$$

$$x_1 = \frac{24}{6} = 4 \qquad x_2 = \frac{-12}{6} = -2 \qquad x_3 = \frac{18}{6} = 3$$

2. Resuelva el siguiente sistema por medio de la regla Cramer.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11$$
$$4x_1 + x_2 - x_3 = 4$$
$$3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \qquad Dx_1 = \begin{vmatrix} 11 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 10 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \\ 2 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -36 \qquad Dx_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 11 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 12$$

$$x_1 = \frac{24}{12} = 2 \qquad x_2 = \frac{-36}{12} = -3 \qquad x_3 = \frac{12}{12} = 1$$

3. Resuelva el siguiente sistema por medio de la regla Cramer.

$$x_1 + x_2 - x_3 = 7$$
$$4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4$$
$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \qquad D_{X_1} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -45$$

$$D_{X_2} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 150 \qquad D_{X_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 70$$

$$x_1 = \frac{-45}{5} = -9 \qquad x_2 = \frac{150}{5} = 30 \qquad x_3 = \frac{70}{5} = 14$$

Método de cofactores

Definición de cofactor. El Cofactor i-j expresado por A_{ij} queda determinado de la siguiente manera:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|$$

El determinante de una matriz non queda definido de la siguiente manera:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots\dots + a_{1n}A_{1n}$$

A esta manera de obtener el determinante se le conoce como desarrollo por cofactores.

Ejemplos:

1. Encuentre el valor del determinante.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(4\right)\left(-1\right)^{2}\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + \left(3\right)\left(-1\right)^{3}\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \left(5\right)\left(-1\right)^{4}\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\left(1\right)\left(4\right)\left(12\right) + \left(-1\right)\left(3\right)\left(11\right) + \left(1\right)\left(5\right)\left(15\right)$$

$|A| =$ (1)(4)(18-6) + (-1)(3)(14-3) + (1)(5)(42-27) = 90

2. Encuentre el determinante de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -2 \\ 8 & 9 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (-1)^2(1)\begin{vmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & -8 \end{vmatrix} + (-1)^3(4)\begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}(-1)^4(5)\begin{vmatrix} 8 & 9 & -1 \\ 3 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}(-1)^5(-2)\begin{vmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$|A| =$ (1)(1)(-94) + (-1)(4)(-96) + (1)(5)(-133) + (-1)(-2)(21) = -333

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 7 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(-1\right)\left(-1\right)^{2}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \left(3\right)\left(-1\right)^{3}\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \left(1\right)\left(-1\right)^{4}\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\left(1\right)\left(-1\right)\left(14\right) + \left(-1\right)\left(3\right)\left(-21\right) + \left(1\right)\left(1\right)\left(-29\right)$$

$$|B| = 20$$

DETERMINANTES DE 3 X 3.

Si calculamos el determinante de la siguiente matriz por medio de cofactores nos queda:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1)^2 (a_{11}) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^3 (a_{12}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^4 (a_{13}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = (a_{11})(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + (-a_{12})(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + (a_{13})(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Con la expresión anterior obtenemos el determinante de A por medio de cofactores para una matriz de 3 x 3.

Saber Hacer en la practica (4)
Resolver problemas donde resultan sistemas de ecuaciones lineales.

Resolver por el método de Cramer.

a) $\begin{array}{l} x+y+z=11 \\ x-y+3z=13 \\ 2x+2y-z=7 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} x+y+z+u=4 \\ x+2y+3z-u=-1 \\ x+4y+3z-u=-7 \\ 3x+4y+2z+u=-5 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x+y+z+u=10 \\ 2x-y-2z+2u=2 \\ x-2y+3z-u=2 \\ x+2y-4z+2u=1 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} x-2y+z+3u=-3 \\ 3x+y-4z-2u=7 \\ 2x+2y-z-u=1 \\ x+4y+2z-5u=12 \end{array}$

e) $\begin{array}{l} 3x-2y=-1 \\ 4x+z=-28 \\ x+2y+3z=-43 \end{array}$

f) $\begin{array}{l} 2x-3y+z+4u=0 \\ 3x+y-5z-3u=-10 \\ 6x+2y-z+u=-3 \\ x+5y+4z-3u=-6 \end{array}$

Resolver por el método de cofactores.

a) $\begin{array}{l} 4x+7y+5z=-2 \\ 6x+3y+7z=6 \\ x-y+9z=-21 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x+2y=6 \\ 2x+3y=6 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x+y+z=11 \\ x-y+3z=13 \\ 2x+2y-z=7 \end{array}$

d) $\begin{array}{l} x+4y+5z=11 \\ 3x-2y+z=5 \\ 4x+y-3z=-26 \end{array}$

e) $\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}+y=2x+3 \\ x-y=1 \\ x+z=\dfrac{y}{4}+11 \end{array}$

f) $\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}=1 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{2}-z=1 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{8}-\dfrac{z}{2}=0 \end{array}$

IV

Solución de matrices y su inversa

Objetivo particular de la unidad
Analizar y solucionar ecuaciones lineales con matrices.

Habilidades por desarrollar en la unidad
Solucionar problemas prácticos y sistemas de ecuaciones utilizando matrices.

IV. 1 DEFINICIÓN DE MATRIZ

Saber en la Teoría (3)
Definición de la matriz de un sistema de ecuaciones lineales.
Concepto de matriz transpuesta.
Concepto de matriz inversa.
Concepto de matriz diagonal y triangular.

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Tienen también muchas aplicaciones en el campo de la física.

Definición de matriz

Una matriz es una tabla ordenada de escalares $a_{i\,j}$ de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior se denota también por $(a_{i\,j})$, i = 1,..., m, j = 1,..., n, o simplemente por $(a_{i\,j})$.

Los términos horizontales son las filas de la matriz y los verticales son sus columnas. Una matriz con *m* filas y *n* columnas se denomina matriz *m* por *n*, o matriz *m x n*.

Las matrices se denotarán usualmente por letras mayúsculas, *A*, *B*,..., y los elementos de las mismas por minúsculas, *a, b,...*

Ejemplo:

La siguiente matriz es una matriz 2 × 3: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

donde sus filas son (1, -3, 4) y (0, 5, -2) y sus columnas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Clases de matrices

Según el aspecto de las matrices, éstas pueden clasificarse en:

Matrices cuadradas

Una matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas. Se dice que una matriz cuadrada *n* x *n* es de orden *n* y se denomina *matriz n-cuadrada.*

Ejemplo: Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces, *A* y *B* son matrices cuadradas de orden 3 y 2 respectivamente.

Matriz identidad

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz *n*-cuadrada. La diagonal (o diagonal principal) de *A* consiste en los elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}. La traza de *A*, escrito tr *A*, es la suma de los elementos diagonales.

La matriz *n*-cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en cualquier otra posición, denotada por I, se conoce como matriz identidad (o unidad). Para cualquier matriz *A*,

$A \cdot I = I \cdot A = A$.

Matrices triangulares

Una matriz cuadrada $A = (a_{i\,j})$ es una matriz triangular superior o simplemente una matriz triangular, si todas las entradas bajo la diagonal principal son iguales a cero. Así pues, las matrices

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

son matrices triangulares superiores de órdenes 2, 3 y 4.

Matrices diagonales

Una matriz cuadrada es diagonal, si todas sus entradas no diagonales son cero o nulas. Se denota por D = diag (d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn}). Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 6 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

son matrices diagonales que pueden representarse, respectivamente, por diag(3,-1,7) diag(4,-3) y diag(2,6,0,-1).

Traspuesta de una matriz

La traspuesta de una matriz A consiste en intercambiar las filas por las columnas y se denota por A^T.

Así, la traspuesta de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ es } A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, si $A = (a_{i\,j})$ es una matriz m x n, entonces $A^T = \left(a^T_{ij}\right)$ es la matriz $n \times m$. La trasposición de una matriz cumple las siguientes propiedades:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. $(A^T)^T = A$.
3. $(kA)^T = kA^T$ (si k es un escalar).
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Concepto de Matriz Inversa

Sean A y B dos matrices cuadradas de forma que AB=BA=I; en estas condiciones, la matriz B se llama inversa de A y se escribe $B=A^{-1}$ (B igual a inversa de A). Recíprocamente, la matriz A es la inversa de B, y se puede escribir $A=B^{-1}$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}6 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$AB=I \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Saber Hacer en la practica (2)
Aplicar las descomposiciones para resolver Ax = B

Un sistema de ecuaciones se puede descomponer en tres matrices de la forma Ax = B.
De modo que la matriz A, es la matriz de coeficientes. La matriz x corresponde a las incógnitas del sistema y la B es la matriz de términos independientes.

Ejemplo:

$$x_1+6x_2 \qquad +4x_5=-2$$
$$x_3 \quad +3x_5=1$$
$$x_4+5x_5=2$$

$$\begin{bmatrix}1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

IV.2 OPERACIONES DE MATRICES Y SUS PROPIEDADES

Saber en la Teoría (2)
Definir las operaciones de las matrices.
Los teoremas de matrices.

Suma y resta de matrices

Para poder sumar o restar matrices, éstas deben tener el mismo número de filas y de columnas. Es decir, si una matriz es de orden 3×2 y otra de 3×3, no se pueden sumar ni restar. Esto es así ya que, tanto para la suma como para la resta, se suman o se restan los términos que ocupan el mismo lugar en las matrices.

Ejemplo:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Para sumar o restar más de dos matrices se procede igual. No necesariamente para poder sumar o restar matrices, éstas tienen que ser cuadradas.

Ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A + B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Producto de matrices

Para poder multiplicar dos matrices, la primera debe tener el mismo número de columnas que filas la segunda. La matriz resultante del producto quedará con el mismo número de filas de la primera y con el mismo número de columnas de la segunda.

Es decir, si tenemos una matriz 2 x 3 y la multiplicamos por otra de orden 3 x 5, la matriz resultante será de orden 2 x 5.

(2 x 3) x (3 x 5) = (2 x 5)

Se puede observar que el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa, ya que en el ejemplo anterior, si multiplicamos la segunda por la primera, no podríamos efectuar la operación.

3 x 5 por 2 x 3,

puesto que la primera matriz no tiene el mismo número de columnas que filas la segunda.

Supongamos que $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices tales que el número de columnas de A coincide con el número de filas de B; es decir, A es una matriz m x p y B una matriz p x n. Entonces el producto AB es la matriz m □ n cuya entrada ij se obtiene multiplicando la fila i de A por la columna j de B.

Esto es,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ . & \dots & . \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ . & \dots & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ . & \dots & . & \dots & . \\ . & \dots & . & \dots & . \\ . & \dots & . & \dots & . \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ . & \dots & . \\ . & c_{ij} & . \\ . & \dots & . \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$

Ejemplo:

1.

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Producto por un escalar

El producto de un escalar k por la matriz A, escrito $k \cdot A$ o simplemente kA, es la matriz obtenida multiplicando cada entrada de A por k:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Entonces:

$$3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

<u>División de matrices</u>

La división de matrices se define como el producto del numerador multiplicado por la matriz inversa del denominador. Es decir, sean las matrices A y B tal que $A/B = AB^{-1}$:

Si una matriz está dividida entre un escalar, todos los términos de la matriz quedarán divididos por ese escalar.

Ejemplo:

Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, y $k = 2$ un escalar. En este caso:

$$A/k = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 8/2 & 16/2 \\ 3/2 & -6/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

Teoremas de Matrices.

Suponiendo que los tamaños de las matrices son tales que las operaciones indicadas se pueden efectuar, entonces son válidas las siguientes reglas de aritmética matricial.

$$
\begin{aligned}
&A+B=B+A\\
&A+(B+C)=(A+B)+C\\
&A(BC)=(AB)C\\
&A(B+C)=AB+AC\\
&(B+C)A=BA+CA\\
&A(B-C)=AB-AC\\
&(B-C)A=BA-CA\\
&a(B+C)=aB+aC\\
&a(B-C)=aB-aC\\
&(a+b)C=aC+bC\\
&a(bC)=(ab)C\\
&a(BC)=(aB)C=B(aC)
\end{aligned}
$$

Saber Hacer en la practica (6)
Ejercicios de operaciones con matrices.

1. A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ C= $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

a) Hallar A+B, A-C, B+C
b) Hallar –2A, 3B, 0.B, $\frac{1}{2}C$, AB.

IV.3 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LIENALES CON MATRICES

Saber en la teoría (2)
La eliminación Gaussiana y su relación con el producto de matrices
Método de Cofactores

Eliminación Gaussiana y su relación con el producto de matrices.

Podemos utilizar matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Todas las operaciones utilizadas con las matrices corresponden a operaciones con ecuaciones. En vista de que las operaciones dan lugar a matrices equivalentes, las llamamos operaciones fila equivalentes. Las matrices se dice que son fila equivalente.

Es un procedimiento sistemático para resolver sistemas de ecuaciones lineales; el método se basa en la idea de reducir la matriz aumentada a una forma suficientemente simple para que el sistema de ecuaciones se pueda resolver por inspección.

El siguiente ejemplo es una matriz que esta en forma *escalonada reducida*. Para que una matriz sea de esta forma, debe tener las siguientes propiedades:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.- Si un renglón no consta completamente de ceros, entonces el primer número diferente de cero en el renglón es un 1. (Que se denomina 1 principal).

2.- Si hay renglones que constan completamente de ceros, se agrupan en la parte inferior de la matriz.

3.- En dos renglones consecutivos cualesquiera que no consten completamente de ceros, el 1 principal del renglón inferior aparece más a la derecha que el 1 principal en el renglón superior.

4.- Cada columna que contenga un 1 principal tiene ceros en todas las demás posiciones.

Se dice que una matriz con las propiedades 1,2,3 (pero no necesariamente con la propiedad 4) está *en forma escalonada*.

Las siguientes matrices están en forma escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las siguientes matrices están en forma escalonada.

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & 7\\ 0 & 1 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Nota.- Según el ejemplo anterior, una matriz en forma escalonada tiene ceros debajo de cada 1 principal, mientras que una matriz en forma escalonada reducida tiene ceros tanto arriba como debajo de cada 1 principal.

Si por medio de una serie de operaciones elementales en los renglones, se llega a la forma escalonada reducida a partir de la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, entonces el conjunto solución del sistema será evidente por inspección o al cabo de unos cuantos pasos simples. Este hecho se ilustra con el siguiente ejemplo:

Suponer que la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales se ha reducido por operaciones en los renglones a la forma escalonada reducida dada.
Resolver el sistema:

a) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$ El sistema de ecuaciones correspondiente es: $x_1=5, x_2=-2, x_3=4$.

b) $\begin{bmatrix}1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ El sistema de ecuaciones correspondiente es:

$$\begin{aligned} x_1+6x_2 \qquad\qquad +4x_5&=-2\\ x_3 \quad +3x_5&=1\\ x_4+5x_5&=2 \end{aligned}$$

Aquí las variables principales son x_1, x_3, y x_4 y las variables libres son x_2 y x_5. Al expresar las variables principales en términos de las variables libres se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1&=-2-6x_2-4x_5\\ x_3&=1-3x_5\\ x_4&=2-5x_5 \end{aligned}$$

Puesto que x_5 puede asumir un valor cualquiera t y x_2 puede asignarse un valor s, entonces existe una infinidad de soluciones

Método de Gauss

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, se aplica el método de Gauss. Este proceso se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Sea el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & z & = & -4 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

su matriz ampliada asociada es

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 5 & -1 & \vdots & -4 \\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ahora resolvemos por el método de Gauss sabiendo que la primera columna corresponde a los coeficientes de la *x*, la segunda a los de la *y*, la tercera a los de la *z* y la cuarta a los términos independientes:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 5 & -1 & \vdots & -4 \\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10 \\ 0 & -8 & -4 & \vdots & -4 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & -28 & \vdots & -84 \end{pmatrix} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

De este modo, el sistema tiene la solución única

$x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.

Saber Hacer en la practica (5)

Resolver problemas donde resultan sistemas de ecuaciones lineales.

Resolver por los siguientes ejercicios.

a) $x_1+x_2+2x_3=8$
$-x_1-2x_2+3x_3=1$
$3x_1-7x_2+4x_3=10$

b) $2x_1+2x_2+2x_3=0$
$-2x_1+5x_2+2x_3=1$
$8x_1+x_2+4x_3=-1$

c) $x-y+2z-w=-1$
$2x+y-2z-2w=-2$
$-x+2y-4z+w=1$
$3x-3w=-3$

d) $-2b+3c=1$
$3a+6b-3c=-2$
$6a+6b+3c=5$

e) $2a-3b=2$
$2a+b=1$
$3a+2b=1$

f)
$$\begin{aligned} 4m-8n&=12\\ 3m-6n&=9\\ -2m+4n&=-6 \end{aligned}$$

V

Solución de sistemas de ecuaciones

Objetivo particular de la unidad
Resolver sistemas de ecuaciones lineales con herramientas computacionales.

Habilidades por desarrollar en la unidad
Solucionar sistemas de ecuaciones lineales utilizando herramientas computacionales.

V. 1 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON MÉTODOS COMPUTACIONALES

Saber en la Teoría (4)
Propuesta de software: EQNLIN
Representación matricial de un sistema de ecuaciones

Aplicación de software en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales:
a) Hoja de cálculo en la aplicación de métodos con matrices y determinantes.
b) Software especializado en resolución de sistemas de ecuaciones.

Saber Hacer en la practica (10)
Solución de un sistema de ecuaciones con el software elegido.

Resolver los siguientes ejercicios mediante algún software.

a) $$\begin{aligned} 5x - 2y &= -44 \\ x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x - y + z &= -1 \\ 4x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 4x + 2y &= 11 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 5x + 2 &= 3y \\ 4x + 2y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 9 \\ 2x - y + 2z &= -8 \\ 3x - y - 4z &= 3 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 3x - 3y &= 6 \\ 9x - 2y &= 3 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} &3x+3y-2=0 \\ &2y=-1+5x \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} &4x+y-3z=1 \\ &8x+y-z=5 \\ &2x+y+2z=5 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} &3x+2y+2z=3 \\ &x+2y-z=5 \\ &2x-4y+z=0 \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} &x-2y+z+3u=-3 \\ &3x+y-4z-2u=7 \\ &2x+2y-z-u=1 \\ &x+4y+2z-5u=12 \end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned} &x+y-z=-4 \\ &4x+3y+2z-u=9 \\ &2x-y-4z+u=-1 \\ &x+2y+3z+2u=-1 \end{aligned}$$

l) $$\begin{aligned} &2x-3z-u=2 \\ &3y-2z-5u=3 \\ &4y-3u=2 \\ &x-3y+3u=0 \end{aligned}$$

m) $$\begin{aligned} &3x+2y=-2 \\ &x+y+u=-3 \\ &3x-2y-u=-7 \\ &4x+5y+6z+3u=11 \end{aligned}$$

n) $$\begin{aligned} &x+y-2z+3w+2n=9 \\ &8x+5y-2z-w+2n=3 \\ &2x+2y-z+w-2n=1 \\ &3x+3y-z+w+n=5 \\ &4x+4y+z-3n=4 \end{aligned}$$

o) $$\begin{aligned} &2x+2y+4z+4w+13n=13 \\ &x-y+2z+2w+6n=6 \\ &y-z-w-3n=-3 \\ &3x-2y+4z+4w+12n=14 \\ &2x-2y+4z+5w+15n=10 \end{aligned}$$

VI

Aplicación del álgebra lineal en problemas de sistemas eléctricos y electrónicos

Objetivo particular de la unidad
Resolver sistemas eléctricos y electrónicos a partir de sistemas de ecuaciones lineales.

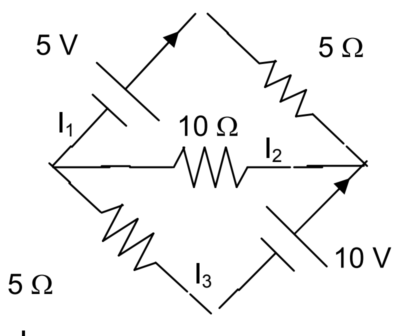
Habilidades por desarrollar en la unidad
Solucionar sistemas de ecuaciones de electricidad y electrónica.

VI. 1 SOLUCIÓN DE SISTEMAS ELÉCTRICOS Y ELECTRÓNICOS A PARTIR DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DE DIVERSOS CASOS PRÁCTICOS.

Saber Hacer en la practica (10)
Aplicar los conocimientos adquiridos en solución de sistemas eléctricos y electrónicos en de diversos casos prácticos.

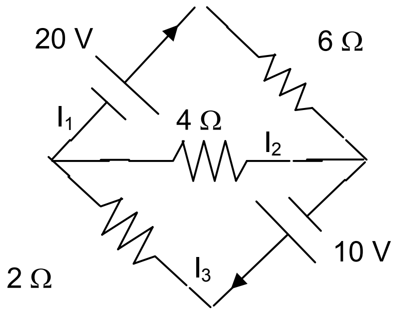
Resolver los siguientes ejercicios utilizando los diversos métodos y herramientas estudiados en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

a) El circuito de la siguiente figura tiene las siguientes ecuaciones. Encontrar I_1, I_2, I_3.

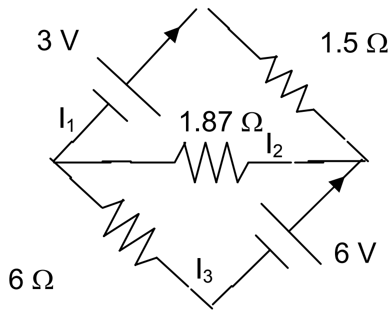


$I_1 + I_3 = I_2$
$5V = 5\Omega I_1 + 10\Omega I_2$
$10V = 10\Omega I_2 + 5\Omega I_3$

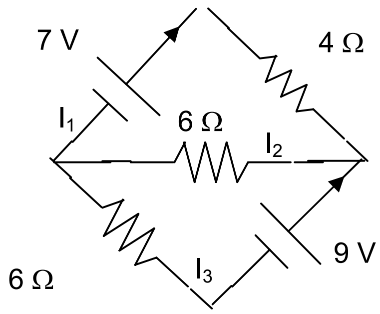
b) $I_1 = I_2 + I_3$
$20V = 6\Omega I_1 + 4\Omega I_2$
$10V = 2\Omega I_2 - 4\Omega I_3$



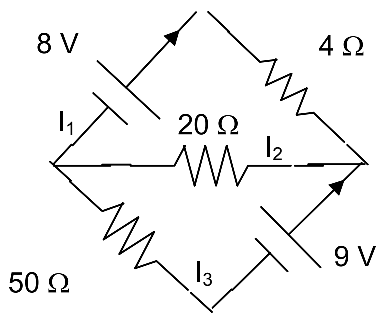
c) $I_1 + I_3 = I_2$
$3V = 1.5\Omega I_1 + 1.87\Omega I_2$
$6V = 1.87\Omega I_2 + 6\Omega I_3$



d) $I_1 + I_3 = I_2$
$7V = 4\Omega I_1 + 6\Omega I_2$
$9V = 6\Omega I_2 + 6\Omega I_3$



e) $I_1 + I_3 = I_2$
$8V = 4\Omega I_1 + 20\Omega I_2$
$9V = 20\Omega I_2 + 50\Omega I_3$



Guía de Prácticas

Prácticas de la unidad 2

PRÁCTICA No. 1
RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Fecha			Grupo
No de alumnos por práctica		No. de alumnos por reporte	3-4
Nombre y firma del profesor			
Nombre (s) del alumno (s)			
Tiempo estimado	1.5	Hrs	Calificación

1. Objetivo.
El alumno aplicará los diferentes métodos en la resolución de problemas de ecuaciones lineales con una o mas incógnitas.

2. Materiales y/o equipos.
No se requieren materiales o equipos

3. Desarrollo general.
Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método indicado.

a) Método de eliminación

$4x + 2y = 5$
$5x – 3y = - 2$

b) Método de sustitución

$x + y = - 4$
$2y + z = 0$
$- x + z = 5$

4. Resultados y conclusiones de la práctica por parte del alumno.

Prácticas de las unidades 3 y 4

PRÁCTICA No. 2

RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES MEDIANTE MATRICES Y DETERMINANTES

Fecha			Grupo
No de alumnos por práctica		No. de alumnos por reporte	3-4
Nombre y firma del profesor			
Nombre (s) del alumno (s)			
Tiempo estimado	1.5	Hrs	Calificación

1. Objetivo.
El alumno aplicará los métodos de resolución de matrices y de determinantes a fin de poderlos aplicar a situaciones reales.

2. Materiales y/o equipos.
Calculadora

3. Desarrollo general.
Resolver mediante un método de matrices y un método de determinantes el siguiente problema.

Dos transmisores de electricidad X, Y, pueden extraerse de dos tipos de minerales P y Q. 100 kg del mineral P producen 3 g de X y 5 de Y. 100 kg del mineral Q producen 4 g de X y 2.5 de Y. ¿Cuántos kg de los minerales P y Q se requerirán para producir 72 g de X y 95 de Y.

4. Resultados y conclusiones de la práctica por parte del alumno.

Prácticas de la unidad V

PRÁCTICA No. 3

RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES MEDIANTE SOFTWARE DE MATEMATICAS

Fecha		Grupo
No de alumnos por práctica	No. de alumnos por reporte	3-4
Nombre y firma del profesor		
Nombre (s) del alumno (s)		
Tiempo estimado	Hrs	Calificación

1. Objetivo.
El alumno aplicará los diferentes software matemáticos en la resolución de problemas de ecuaciones lineales con una o mas incógnitas.

2. Materiales y/o equipos.
Computadora

3. Desarrollo general.
Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el software indicado.

a) $4x + 2y = 5$
$5x - 3y = -2$

b) $2a + b - c = 5$
$3a - 2b + 2c = -3$
$a - 3b - 3c = -2$

c) $3x - 2y + 3z = 4$
$5x + 4z = 3$
$2x + 7y = -8$

d) $x + y = -4$
$2y + z = 0$
$-x + z = 5$

4. Resultados y conclusiones de la práctica por parte del alumno.

Bibliografía

ÁLGEBRA
CHARLES J. LEHMAN
LIMUSA NORIEGA EDITORES, S.A.

ÁLGEBRA SUPERIOR
LOUIS LEITHOLD
CECSA

ÁLGEBRA
AURELIO BALDOR
PUBLICACIONES CULTURAL

MATRICES
FRANK AYRES JR.
McGraw-Hill

ALGEBRA LINEAL CON APLICACIONES
W. KEITH NICHOLSON
MC GRAW HILL

ALGEBRA ELEMENTAL
G FULLER
CECSA

ALGEBRA LINEAL CON APLICACIONES
LAY
MC GRAW HIIL