Avances En Matemática Educativa

El Alumno en Acción

No. 9

ALEJANDRO MIGUEL ROSAS MENDOZA

Lectorum

PROGRAMA EDITORIAL DEL
PROGRAMA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
PROME

AVANCES EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
EL ALUMNO EN ACCIÓN
NO. 9

Alejandro Miguel Rosas Mendoza
Editor

Avances en Matemática Educativa. El alumno en acción.

D. R. © Editorial Lectorum, S. A. de C.V., 2021
Batalla de Casa Blanca Manzana 147 Lote 1621
Col. Leyes de Reforma, 3ª Sección
Tel. 5581 3202
www.lectorum.com.mx
ventas@lectorum.com.mx

Programa de Matemática Educativa
www.matedu.cicata.ipn.mx

Primera Edición: agosto 2021
ISBN: 978-607-457-669-6

Corrección Ortográfica y de Estilo: Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza
Logística y Edición: Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza
Diseño de Portada: Ing. Fausto Manuel Hernández Sierra

Hecho en México

ARBITRAJE DE LOS ARTÍCULOS

Los artículos contenidos en este libro surgieron de entre 23 propuestas originales, cada propuesta fue evaluada por tres miembros diferentes del Comité Científico Evaluador. En este proceso de arbitraje hubo artículos cuyo contenido o calidad de exposición no fueron aprobados por alguno de los revisores y por ello no pudieron ser incluidos en este libro.

Entre las revisiones realizadas se incluyó una específica del formato APA, para que todas las citas y referencias bibliográficas cumplan con la 7ª Edición del formato APA, al igual que las tablas y figuras incluidas en los artículos.

Las recomendaciones y sugerencias que hicieron los revisores fueron atendidas por los autores, y las versiones corregidas de los artículos fueron sometidas a una nueva revisión. La mayoría de las nuevas versiones fueron aceptadas, aunque hubo algunos artículos que recibieron nuevas observaciones para corregir la presentación. En una tercera versión fueron aceptados.

También se rechazaron algunos artículos debido a que, al aplicar el software antiplagio Turnitin®, se observó que su contenido incluía porciones de obras de terceros sin las correspondientes citas y reconocimientos. Todos los artículos incluidos en el libro presentan menos del 15% de similaridad, el cual es nuestro máximo aceptable.

El Comité Científico Evaluador estuvo formado por profesionales de la educación de diversas instituciones educativas pertenecientes a Colombia, Ecuador, Guatemala, México y Uruguay.

Comité Científico Evaluador

DR. ALEJANDRO MIGUEL ROSAS MENDOZA
CICATA-LEGARIA
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CIUDAD DE MÉXICO
MÉXICO

DR. SERGIO DAMIÁN CHALÉ CAN
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
CIUDAD DE MÉXICO
MÉXICO

DRA. MARTHA LETICIA GARCÍA RODRÍGUEZ
CICATA-LEGARIA
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CIUDAD DE MÉXICO
MÉXICO

M.C. FABIOLA ARRIVILLAGA HURTADO
FACULTAD DE EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA – CAMPUS SUR
GUATEMALA

M.C. JUAN GABRIEL MOLINA ZAVALETA
CICATA-LEGARIA
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CIUDAD DE MÉXICO
MÉXICO

M.C. EDISON ROBERTO VALENCIA
FACULTAD DE CONTABILIDAD Y AUDITORÍA
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO
AMBATO
ECUADOR

DR. APOLO CASTAÑEDA ALONSO
CICATA-LEGARIA
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CIUDAD DE MÉXICO
MÉXICO

M.C. LUZ MARINA FORERO CONTRERAS
COLEGIO LOS NOGALES
BOGOTÁ, DISTRITO CAPITAL
COLOMBIA

M.C. MARÍA DE LOURDES NAVAS PADILLA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS-ESPE
ECUADOR

M.C. CYNTHIA ARAGÓN CRUZ
SERVICIO NACIONAL DE BACHILLERATO EN LÍNEA "PREPA EN LÍNEA SEP"
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
SONORA
MÉXICO

MAG. GUSTAVO FRANCO CARZOLIO
INSTITUTO DE PROFESORES "ARTIGAS"
CONSEJO DE FORMACIÓN EN EDUCACIÓN
MONTEVIDEO
URUGUAY

M.C. IRIS FEO MAYOR
CICATA-LEGARIA
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CIUDAD DE MÉXICO
MÉXICO

DR. ISMAEL OSUNA GALÁN
DIVISIÓN DE CIENCIAS, INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA
UNIVERSIDAD DE QUINTANA ROO
QUINTANA ROO
MÉXICO

M.M.E. PAULINA ROMERO MONTES DE OCA
SEDUZAC
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
ZACATECAS
MÉXICO

M.C. MIRYAN TRUJILLO CEDEÑO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DE LA SALLE
BOGOTÁ
COLOMBIA

DRA. DANIELA PAGÉS ROSTÁN
PROFESORADO SEMIPRESENCIAL
CONSEJO DE FORMACIÓN EN EDUCACIÓN
MONTEVIDEO
URUGUAY

M.C. MELVA LIZED FLORES GIL
CENTRO DE ESTUDIOS TECNOLOGICOS
INDUSTRIAL Y DE SERVICIOS NO. 36.
JUAN JOSÉ DE LOS REYES MARTINEZ AMARO
"EL PÍPILA"
TULTITLÁN
MÉXICO

Índice

Análisis de la dimensión cognitiva acerca del uso del sentido bidireccional del signo igual: Hacia el diseño de una situación didáctica para bachillerato 1
Juan Ernesto Corona Maldonado, Nancy Janeth Calvillo Guevara, Elvira Borjón Robles

Argumentación en estudiantes de secundaria: de la Interacción a la Interactividad 21
Wilmer Ríos-Cuesta

Concepciones erróneas en estudiantes universitarios sobre subespacios vectoriales: el caso de la suma directa 35
Andrea Cárcamo, Claudio Fuentealba,

Construcción Mental de la Integral Definida 47
Abel Medina Mendoza, Mario Enrique Águeda Herrera, Marisa Guadalupe Flores Aguilar, Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Diagnóstico de errores comunes con el uso de la calculadora científica en estudiantes universitarios 69
Juan José Díaz Perera, Mario Saucedo Fernández, Heidi Angélica Salinas Padilla

Estrategias utilizadas por estudiantes de bachillerato en tareas de generalización 91
Romy Adriana Cortez Godinez, Urbano Trejo Elizalde, Elia Trejo Trejo

Experiencias de modelación-graficación a partir del modelo 5e en una Telesecundaria de Chiapas y un bachillerato del IPN 107
Guillermina Ávila García, Liliana Suárez Téllez, Víctor Hugo Luna Acevedo, Adriana Atenea de la Cruz Ramos

La Generalización de patrones en el nivel medio superior: Una propuesta didáctica 127
Juan Ernesto Corona Maldonado, Elvira Borjón Robles,

ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN TAREAS DE GENERALIZACIÓN

Romy Adriana Cortez Godinez, Urbano Trejo Elizalde, Elia Trejo Trejo
Cortes-2301@gmail.com; utrejo@gmail.com, elitret@gmail.com

Resumen

En este texto se analizan y clasifican las estrategias empleadas por estudiantes del 3° de bachillerato en tareas de generalización lineal; como parte de la perspectiva teórica se ha empleado la codificación de estrategias propuesta por Zapatera y Callejo (2011), estrategias aditivas, funcionales y proporcionales; los resultados revelan la carencia de estrategias funcionales tanto en la generalización cercana como lejana. Se concluye la necesidad de desarrollar alternativas que promuevan el empleo de estrategias funcionales en las tareas de generalización.

Palabras clave: Estrategias, Clasificación, Generalización, Lineal, Bachillerato.

Abstract

In this research study, various strategies, which were employed by senior high school students in their tasks of linear generalization, were analyzed and classified. From a theoretical perspective, the coding of strategies proposed by Callejo and Zapatera (2011) has been used as well as proportional, functional and additive strategies. Results reveal the lack of functional strategies, not only in the closer but also in the distant generalization. It is then concluded that there is a need to develop alternatives which foster the use of functional strategies in the tasks of generalization.

Key Words: Strategies, Classification, Generalization, Linear, High School.

Introducción

La generalización tiene un papel destacado dentro del álgebra, en este sentido Mason (1996), afirma que generalización es el nervio de las matemáticas y al respecto Zapatera (2018a) enfatiza que es uno de los procesos cognitivos más importantes de la actividad matemática. Numerosas investigaciones se han orientado al estudio de las estrategias empleadas por los alumnos en el proceso de generalización; García-Reche et al. (2015) identificaron cinco grupos de estrategias en problemas de generalización lineal en estudiantes de 5° y 6° de primaria, de igual forma Zapatera (2018a) encontró que los estudiantes de educación primaria que se enfrenta con éxito a problemas de generalización se inician con estrategias aditivas y luego pasan a estrategias funcionales. En este mismo sentido, Osorio (2012) señala que ante el trabajo con sucesiones de segundo orden, los estudiantes de secundaria utilizaron sin éxito estrategias recursivas; Callejo y Zapatera (2014) en su investigación sobre la flexibilidad (modificación de las estrategias al aumentar la demanda cognitiva) de resolución de patrones lineales en estudiantes de secundaria constataron que la estrategia más común fue la recursiva y que la mayoría no fue capaz de cambiar esta estrategia. Valenzuela y Gutiérrez (2018) al estudiar las estrategias utilizadas en alumnos de bachillerato encontraron que las estrategias recursivas son las más utilizadas en la generalización cercana, pero dejan de ser efectivas en la generalización lejana.

A partir de estas ideas y considerando la riqueza que representa para el profesor el reconocimiento de la diversidad de razonamientos de los estudiantes y las dificultades que pueden surgir en este tipo de tareas, esta investigación se centra en el estudio de los mecanismos y razonamientos empleados por alumnos de 3° de nivel medio superior ante un problema de generalización lineal, el objetivo es categorizar las estrategias de resolución.

Marco teórico

Para Merino et al. (2013) las tareas de generalización radican en obtener, a partir de casos particulares conocidos, nuevos casos particulares o el término general; y requieren la identificación del patrón de comportamiento de los casos particulares. Por su parte Zapatera (2018b) señala que los problemas de generalización de patrones presentan una situación mediante un dibujo o figura que proporciona los primero términos de una progresión aritmética y contiene:

- Tareas de generalización cercana (se pide calcular el valor $f(n)$ para n pequeño)
- Tareas de generalización lejana (se pide calcular $f(n)$ para n grande)
- Obtención y expresión de la regla general
- Inversión del proceso

Cabe resaltar, que en las tareas de generalización lineal el sistema de representación gráfica es una valiosa alternativa para identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes (Orton, Orton y Roper (1999) y Radfor (2000) citados por Cañadas et al. 2008).

En educación matemática las estrategias se definen como formas de actuación o ejecución de las tareas y suponen cualquier procedimiento que pueda ejecutarse considerando las relaciones y conceptos implicados (Rico, 1997). De acuerdo con Zapatera y Callejo (2011) las estrategias empleadas por los estudiantes en tareas de generalización se clasifican en tres categorías:

- Aditivas. Se observa que en cada paso aumenta una diferencia constante, se parte de la primera figura o una figura cualquiera. Se distinguen tres tipos: recuento sobre el dibujo, recuento iterativo o recuento recursivo.
- Funcionales. Relaciona la posición de la figura y el número de elementos mediante una función afín $f(n) = a \cdot n + b \ (b \neq 0)$, donde *a* es el patrón de crecimiento y b el término independiente que se mantiene constante. Pueden ser *locales* (se aplica a una determinada figura) o *globales* (si se aplica a una figura cualquiera).
- Proporcionales. Se encuentra el número de elementos mediante razonamientos proporcionales, mediante la función lineal $f(n) = a \cdot n$.

Metodología

En este estudio participaron 493 estudiantes de 3° de bachillerato, seleccionados intencionalmente.

Tabla 1

Alumnos participantes

Área de formación	**No. de alumnos**
Ciencias Básicas e Ingenierías	40
Ciencias de la Salud	172
Ciencias Económicas y administrativas	92
Ciencias Sociales y Humanidades	189
Total	493

El problema es una generalización lineal y fue una adecuación del planteamiento propuesto por Valenzuela y Gutiérrez (2018) en que se demanda realizar la generalización cercana y lejana.

Análisis de datos

El análisis se centró en los mecanismos y razonamientos de los estudiantes empleados por los estudiantes ante tareas de generalización, se partió de la codificación de Zapatera y Callejo (2011) para problemas de generalización de patrones lineales:

Estrategias aditivas: se observa el patrón de crecimiento y realiza recuento dibujando la figura o sumando el patrón de crecimiento hasta el último término requerido, partiendo de la primera figura o cualquier otra (Callejo y Zapatera, 2011 citados por Zapatera, 2018a).

Estrategias funcionales: se relaciona la posición de la figura y el número de elementos mediante una función $/(k) = a \cdot k + b$ $(b \neq 0)$, donde a es el patrón de crecimiento y b el término independiente que se mantiene constante; son locales si la aplica a una figura determinadas o global, si se aplica a cualquier figura (Callejo y Zapatera, 2011 citados por Zapatera, 2018a).

Estrategias proporcionales: se encuentra el número de elementos mediante razonamientos proporcionales en base a una función $/(k) = a \cdot k$, no se considera el término independiente (Callejo y Zapatera, 2011 citados por Zapatera, 2018a).

En la generalización cercana se encontraron diversas estrategias aditivas, en algunas se añadió el patrón de crecimiento mediante dibujo; en la figura 1, sobre el término a_+ se añadieron puntos sin embargo la cantidad no corresponde con el término solicitado.

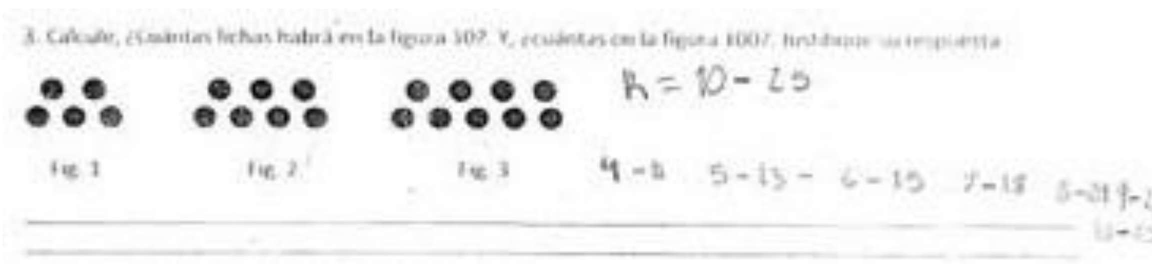
Figura 1

Conteo sobre dibujo

En otras omitieron el dibujo y realizaron directamente conteo recursivo como sucedió en la figura 2, el alumno identificó el patrón de crecimiento pero cometió un error de cálculo en el término a_7 deviniendo en una cantidad que no corresponde al término $a_{(-}$.

Figura 2

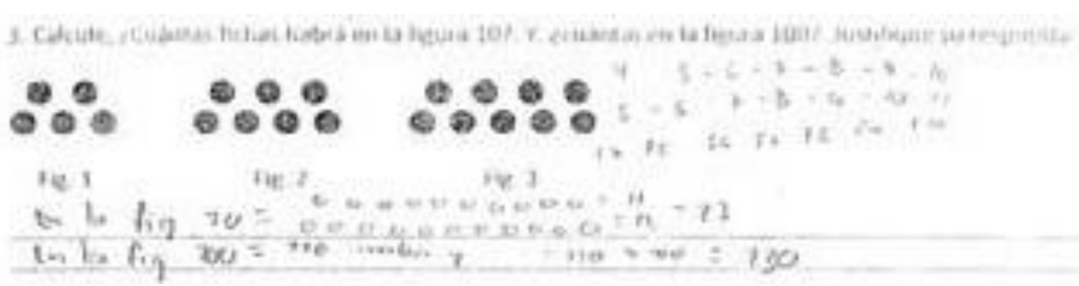
Conteo recursivo



También se presentó la descomposición de la estructura espacial en líneas inferiores y superiores aplicando el factor de crecimiento de manera independiente, se registraron estrategias con recuento iterativo (figura 3), donde cada término a_n se obtenía al sumar la cantidad de elementos de la fila superior y la fila inferior.

Figura 3

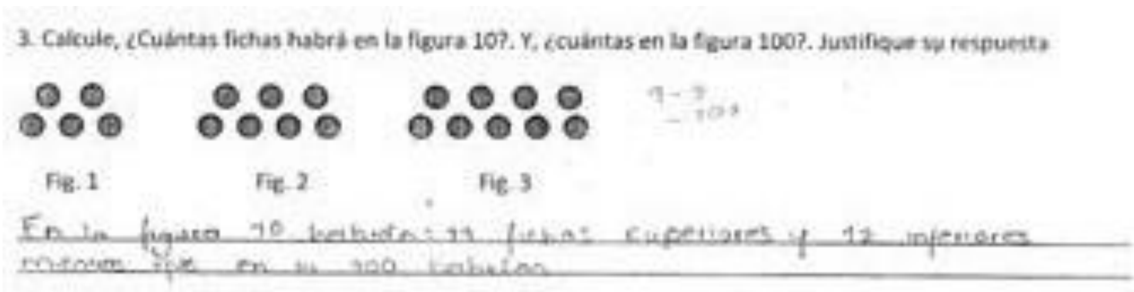
Descomposición de la estructura espacial con conteo recursivo



De igual manera se percibieron planteamientos carentes de recuento (figura 4), se parte del reconocimiento de la regularidad (añadir una ficha a cada fila) para obtener cualquier término, prevaleciendo la noción de dos estructuras.

Figura 4

Descomposición de la estructura espacial

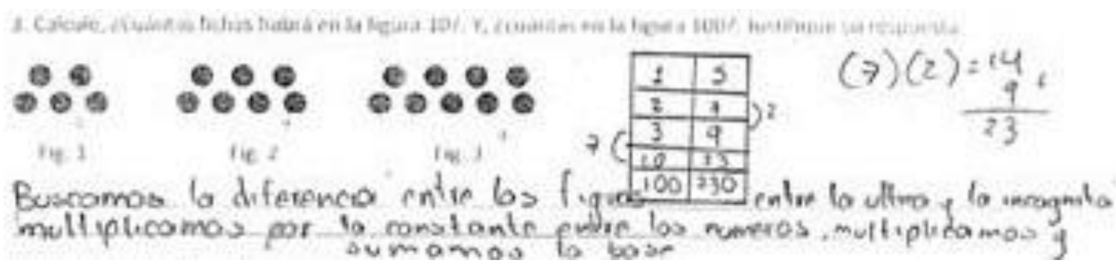


Adicionalmente se registraron estrategias funcionales, que relacionaban la posición de la figura y el número de elementos, algunas resoluciones son más espontáneas y no formalizan la función $/(k) = a \cdot k + b$ $(b \neq 0)$, otras son más precisas y consiguen con éxito la expresión correcta $2 \cdot k + 3$; se diferencian por la forma en que determinan el término independiente y el lenguaje que utilizan.

Los desaciertos en el término independiente b están vinculados con la cantidad de elementos que se mantienen invariables. En el discurso de la figura 5 se parte de a_{+}, se determina que faltan términos para llegar a $a_{(-}$, de esta manera se multiplica el patrón de crecimiento $(a = 2)$ por la figura $(k = 7)$ y se asume erróneamente $a_{+} = 9$ como término independiente.

Figura 5

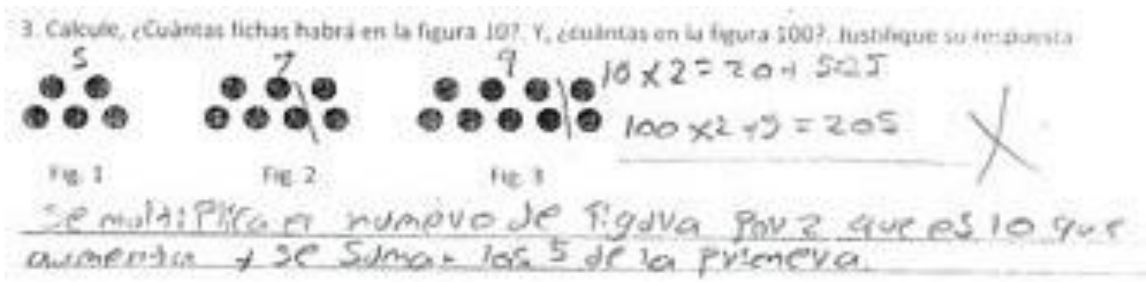
Función afín $/(k) = 2 \cdot k + 9$



Otra estrategia relaciona el patrón, la posición y el término independiente (figura 6) y concibe que todos los elementos de $a_{(}$ constituyen b, la función se puntualiza como $/(k) = 2 \cdot k + 5$.

Figura 6

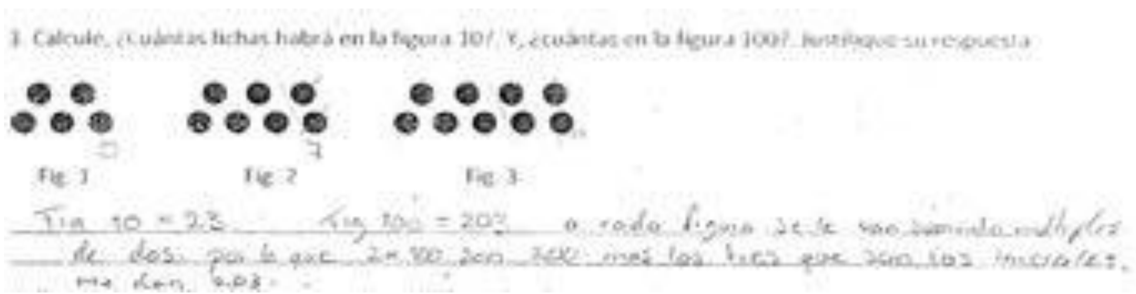
Función afín $/(k) = 2 \cdot k + 5$



Las aproximaciones exitosas a la función $2 \cdot k + 3$ se exteriorizaron con diferentes lenguajes; en la figura 7 el estudiante expresó la relación entre el patrón, la posición y el término independiente a partir del lenguaje común, contempló $b = pukt8s\ 4k4c4al1s$, $k = /4gura$ y $a = múlt4pl8s\ d1\ 2$.

Figura 7

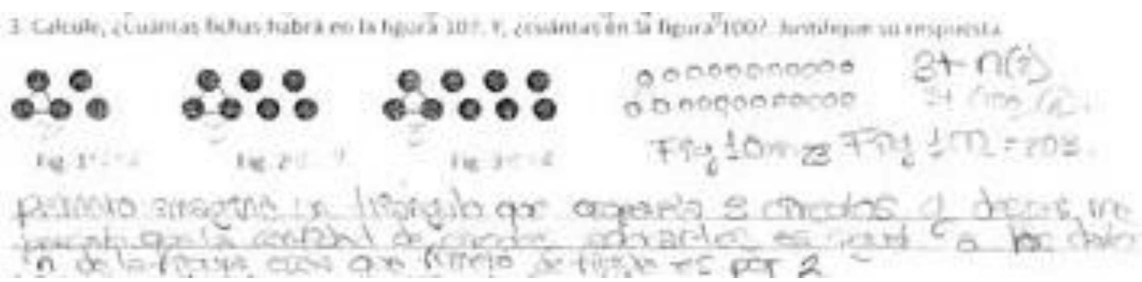
Función $/(k) = 2 \cdot k + 3$ *lenguaje común*



Una solución similar describe los elementos de la función en lenguaje común y la expresa con lenguaje algebraico (figura 8).

Figura 8

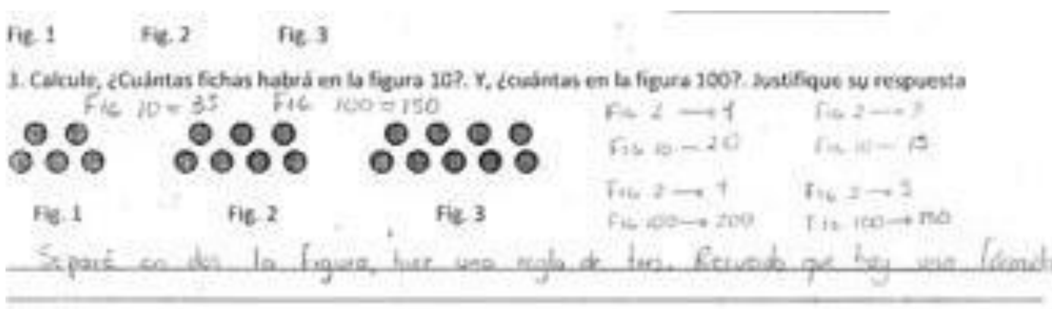
Función $/(k) = 2 \cdot k + 3$ *lenguaje matemático*



Así mismo se registran estrategias de proporcionalidad directa. La figura 9 permite apreciar dicha estrategia, en ella se descompuso la figura y aplicó regla de tres para las filas superior e inferior, fallidamente se determinó $a_{10} = 35$.

Figura 9

Regla de tres con descomposición de figura



La siguiente solución (figura 10) opera la proporcionalidad con el total de elementos, multiplica los elementos de a_1 por la figura buscada a_{10}, de tal forma que si $a_1 = 5$ entonces $a_{10} = k \cdot a_1 = 10 \cdot 5 = 50$.

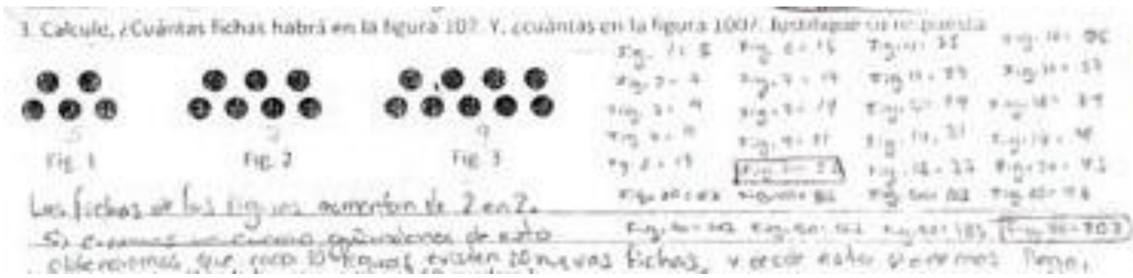
Figura 10

Regla de tres con el total de elementos

Por otro lado, en la generalización lejana también se descubrieron interesantes resoluciones, si bien las estrategias aditivas fueron limitadas se presentaron algunos casos. Como se advierte en la figura 11 se obtuvo $a_{20} = 43$ a partir del conteo recursivo, posteriormente añadió 20 elementos por cada diez términos, donde $a_{30} = 63$, $a_{40} = 83$, $a_{50} = 103$, $a_{60} = 123$, $a_{70} = 143$, $a_{80} = 163$, $a_{90} = 183$ y $a_{100} = 203$ logrando con éxito la tarea.

Figura 11

Generalización lejana sumando cada diez términos



Las sumas recursivas constituyen otra estrategia (figura 12). Para obtener a_1, inicialmente se sumó el número de la figura y el término fijo, $a_1 = 1+3$ y al total $a_1 = 1+3=4$ se añadió nuevamente el número de la figura $a_1 = 1+3=4+1$. Es decir

$a_1 = 1+3=4+1=5$

$a_2 = 2+3=5+2=7$

$a_3 = 3+3=6+3=9$

…….

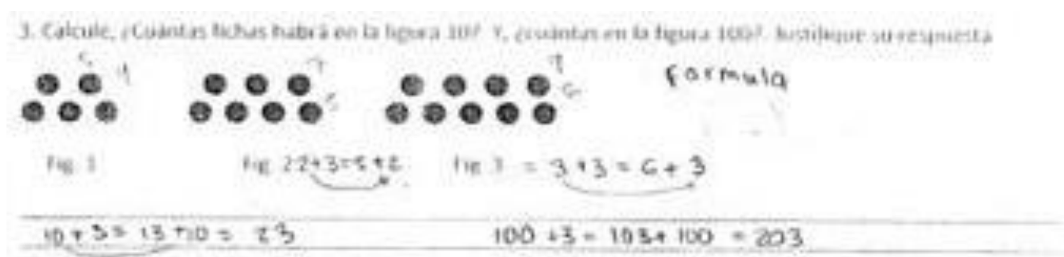
$a_{10} = 10+3=13+10=23$

…….

$a_{100} = 100+3=103+100=203$

Figura 12

Generalización lejana con sumas recursivas



Con respecto a las estrategias funcionales se apreció compresión de la relación entre la posición de la figura y el número de elementos y se advirtió disparidad entre el argumento y el lenguaje utilizado. En la figura 13 se percibe el uso indiscriminado de la palabra constante, sin embargo se declara acertadamente la función como "$(F)(C) + 3$" donde (F) es el número de figura, (C) el patrón de crecimiento y 3 el término independiente.

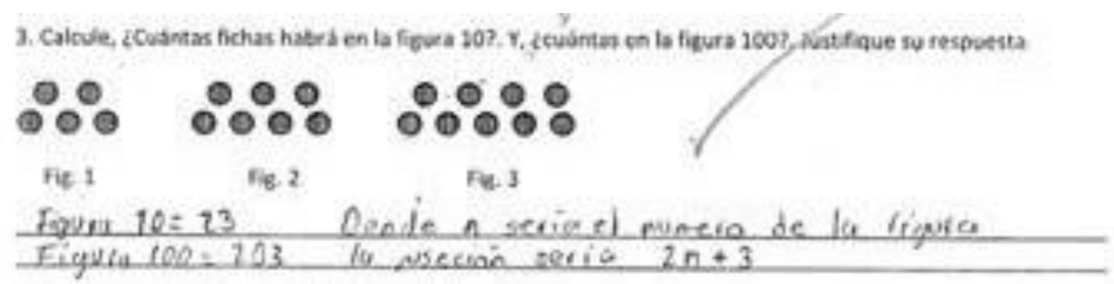
Figura 13

Generalización con lenguaje común

A diferencia de aproximación anterior, la figura 14 hace uso del lenguaje algebraico para expresar la relación encontrada, de ahí que define con éxito la función $2 \cdot k + 3$, donde k es el número de la figura o término buscado.

Figura 14.

Generalización con lenguaje algebraico

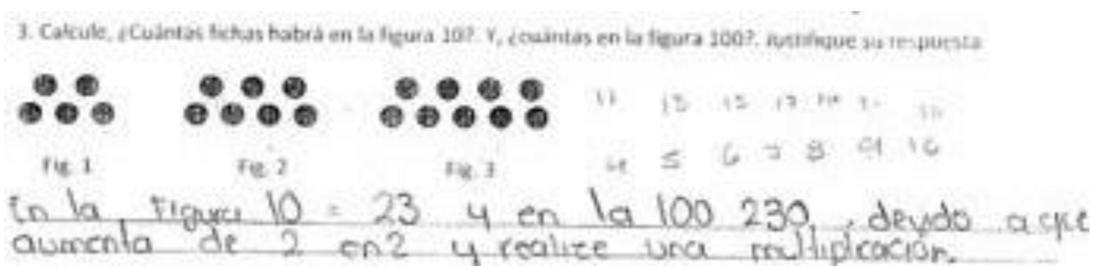


Cabe señalar que las estrategias proporcionales se presentaron desde dos perspectivas, ambas equivocadas. La primera siguiendo la regla de proporcionalidad directa y la segunda usando esquemas multiplicativos.

La resolución bajo el esquema multiplicativo fue muy socorrido y dentro de él se encontraron algunas variaciones; de acuerdo con lo observado en la figura 15 se concibe a_{100} como múltiplo de 10, se multiplican los elementos de $a_{10} \times 10$ para encontrar a_{100}, entonces $23 \times 10 = 230$.

Figura 15

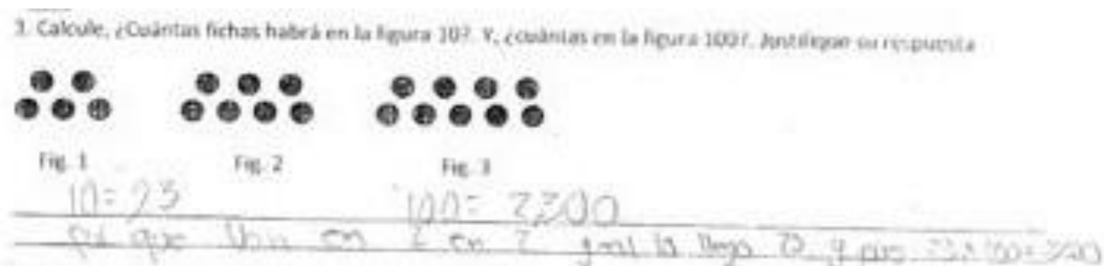
Multiplicación de $a_{10} \times 10$



Continuando con estos razonamientos, otra alternativa (figura 16) partió del total de los elementos de a_{10} y para encontrar a_{100} fue preciso multiplicar los elementos de a_{10} por el número del término buscado, entonces $a_{100} = 23 \times 100$=2300.

Figura 16

Multiplicación elementos $a_{10} \times 100$



Resultados

Del conjunto de pruebas 493 se descartan algunas que no incluyen respuesta a los dos tipos de generalización, cercana y lejana. La tabla 2 muestra la frecuencia de las estrategias en la generalización cercana, en la primera columna se destaca la preponderancia de la estrategia aditiva en todas las áreas; otro aspecto identificado es la presencia de estrategias aditivas, funcionales y proporcionales únicamente en el área de Ciencias Sociales y Humanidades. Adicionalmente se observó que las estrategias proporcionales fueron prácticamente inusuales.

Tabla 2

Frecuencia estrategias en la generalización cercana

	Estrategias		
	Aditivas	Funcionales	Proporcionales
Área de formación			
Ciencias Básicas e Ingenierías	35	3	0
Ciencias Económicas y administrativas	78	6	0
Ciencias de la Salud	142	22	0
Ciencias Sociales y Humanidades	163	12	2
Total	418	43	2

A continuación se reporta lo observado con respecto a la generalización lejana. La tabla 3 expone la frecuencia de las estrategias, en ella se percibe que los alumnos respondieron mediante estrategias variables para encontrar el término $a_{(--}$; la mayoría de los estudiantes optan por hacer uso de estrategias proporcionales que en general fueron erróneas, sin embargo también se advierte la continuidad de estrategias aditivas sin sentido.

Tabla 3

Frecuencia estrategias en la generalización lejana

	Estrategias		
	Aditivas	Funcionales	Proporcionales
Área de formación			
Ciencias Básicas e Ingenierías	3	3	32
Ciencias Económicas y administrativas	7	7	70
Ciencias de la Salud	20	19	125

Ciencias Sociales y Humanidades	22	12	143
Total	52	41	370

De manera general la tabla 4 resume el comportamiento de las estrategias en la generalización cercana y lejana, los resultados muestran que las estrategias funcionales no constituyen una vía de resolución para la mayoría de los estudiantes en ambas tareas, por el contrario, conforme se incrementó la dificultad disminuyó ligeramente su presencia.

Tabla 4

Porcentaje en las tareas de generalización

	Estrategias			
Generalización	Aditivas	Funcionales	Proporcionales	Total
Cercana	90.3%	9.3%	0.4%	100%
Lejana	11.2%	8.9%	79.9%	100%

Las evidencias muestran que en la generalización cercana menos del 10% de los estudiantes obtuvieron éxito, esta tendencia se mantuvo en la generalización lejana puesto que sólo el 8.9% encontró correctamente el término $a_{(--}$, en ambos sucesos la mayoría de los estudiantes proceden del área de Ciencias de la Salud.

Discusiones y conclusiones

Los resultados muestran que en la generalización cercana los estudiantes recurren esencialmente a estrategias aditivas como recuento, sumas y dibujos; y de manera secundaria acuden a las estrategias funcionales, sin embargo en la construcción de la función $/(k) = a \cdot k + b$ $(b \neq 0)$ la identificación del término independiente constituye un obstáculo. Contrariamente en la generalización lejana se privilegiaron inapropiadamente las estrategias proporcionales, que se apostaban básicamente a esquemas multiplicativos con diferentes perspectivas en cuanto a los elementos que han de ser multiplicados. También se ha comprobado que la mayoría de los estudiantes carecen de la terminología de las sucesiones al describir con lenguaje común la función identificada.

Estos hallazgos corroboran lo reportado por Valenzuela y Gutiérrez (2018) acerca del predominio de las estrategias aditivas en la generalización cercana. El empleo de estrategias proporcionales frente a la generalización lejana confirma la desacertada permanencia de la proporcionalidad directa observada desde los primeros niveles de escolaridad como lo reportan Callejo y Zapatera (2014), Valenzuela y Gutiérrez (2018) y Zapatera (2018a). Y tomando como referencia la limitada práctica de estrategias funcionales, se revela la necesidad de desarrollar cambios en la forma en que el profesor aproxima a sus estudiantes a las tareas de generalización como lo han advertido Merino et al. (2013) y Zapatera (2018b). Finalmente esta investigación añade información para el reconocimiento de los razonamientos asociados a las estrategias de resolución en tareas de generalización, que de acuerdo con García-Reche et al. (2015) es parte del conocimiento necesario para enseñar.

REFERENCIAS

Callejo, M. & Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 64-88. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04.

Cañadas, M., Castro, E., & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de Educación Secundaria Obligatoria en el Problema de las Baldosas. *PNA*, *2*(3), 137-151. https://doi.org/10.30827/pna.v2i3.6197. https://doi.org/10.30827/pna.v2i3.6197

García-Reche, A., Callejo, M. & Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones. En C. Fernández, M. Molina & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, (pp. 279-288). SEIEM.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Kluwer Academic Publisher

Merino, E., Cañadas, M. & Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). SEIEM.

Osorio, C. (2012). Procesos de generalización que intervienen en el aprendizaje del alumno al hacer uso de sucesiones. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (25, pp. 75-83). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de Matemáticas para Educación Secundaria. En Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M. & Socas, M. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). ICE-Horsori

Valenzuela, J. & Gutiérrez, V. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. *Educación matemática, 30*(2), 49-72. https://doi.org/10.24844/em3002.03.

Zapatera, A. (2018a). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 21*(1), 87-114. https://dx.doi.org/10.12802/relime.18.2114. https://doi.org/10.12802/relime.18.2114

Zapatera, A. (2018b). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones: una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números: revista de didáctica de las matemáticas, 97*, 51-67.

Zapatera, A. & Callejo, M. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En Marín, M., Fernández, G., Blanco, L. & Palarea, M. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, (pp. 599-610). SIEM