

Análisis diferencial de las condiciones de transporte de calor en un colector solar de placa plana

José Eduardo Flores-Ortega¹
Román Bravo-Cadena¹
Ignacio Carvajal-Mariscal²

¹Universidad Tecnológica del Valle del Mezquital.
Carr. Ixmiquilpan-Capula km 4, Col. El Nith,
Ixmiquilpan, Hidalgo.
MÉXICO.

²Instituto Politécnico Nacional,
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación,
Laboratorio de Ingeniería Térmica e Hidráulica Aplicada.
Edificio 5, 3^{er} piso, Av. Instituto Politécnico Nacional s/n,
Unidad Profesional "Adolfo López Mateos",
Col. Lindavista, México, DF, CP 07738.
MÉXICO.

correo electrónico (email): jefo64@gmail.com
romanbravoc@hotmail.com
icarvajal@ipn.mx

Recibido 25-01-2013, aceptado 30-07-2013.

Resumen

Este trabajo expone el análisis de las condiciones de transporte de calor en un colector solar de placa plana, el colector calienta aire para emplearlo más adelante, como puede ser en la deshidratación de diferentes perecederos, entre otros. El método empleado para la transferencia térmica es por convección natural. Se desarrolla el modelo matemático para obtener las ecuaciones de transporte, identificándose las variables de posición, velocidad y momento. Se propone una solución usando la teoría de Hamilton-Jacobi que se aplicó a datos obtenidos experimentalmente.

Palabras clave: colector solar de placa plana, convección natural, modelo matemático, Hamilton-Jacobi.

Abstract (Differential Analysis of Heat Transport Conditions in a Flat Plate Solar Collector)

This paper presents an analysis of the conditions of transport of heat in a flat plate solar collector, the collector heats air to use it later, such as in the dehydration of various perishable and others. The method used for heat transfer is natural convection. Mathematical modeling is developed to obtain the transport equations, identifying variables position, velocity and time. Proposes a solution using Hamilton-Jacobi theory that applied to data obtained experimentally.

Key words: flat plate solar collector, natural convection, mathematical model, Hamilton-Jacobi.

1. Introducción

Desde tiempos inmemoriales en el Valle de la Muerte (Ixmiquilpan, Valle del Mezquital) el secado al sol ha constituido un método de conservación para chiles y algunos granos, sin embargo, el uso de deshidratadores solares es casi desconocido en la región.

La energía solar es un recurso renovable, gratuito y con elevado índice de incidencia, por ejemplo, en el Valle de la Muerte representa alrededor de 340 días soleados al año. Por lo tanto, puede ser utilizada para el aprovechamiento de frutas y verduras que se producen en la zona, deshidratándolas para su consumo y comercialización, beneficiando a los productores de la región.

El análisis de las condiciones de transporte de calor en los sistemas térmicos, se hace tradicionalmente utilizando tratamientos que emplean volúmenes de control [1]; aumentando su complejidad cuando se requiere mayor precisión [2].

Por lo anteriormente descrito, la motivación del presente trabajo es utilizar un método diferencial que pueda proporcionar mayor simpleza y precisión en el análisis de las condiciones de transporte térmico en un colector solar de placa plana. Con él se podrán obtener la posición y la velocidad del fluido caloportador, parámetros importantes en el proceso de convección natural, para su utilización en sistemas de deshidratación de diferentes perecederos.

2. Consideraciones para el modelado del proceso

Para los sistemas de deshidratación es fundamental tener la velocidad del fluido caloportador, con el objeto de hacer eficiente el proceso y de mantener las propiedades de los alimentos.

El estudio de los fenómenos de transporte se ha realizado tradicionalmente comenzando por el transporte de cantidad de movimiento, luego el transporte de energía [3] y finalmente el transporte de masa.

Si consideramos que tendremos una placa calentada por el sol, el flujo del fluido sobre la superficie de más temperatura es una consecuencia de la interacción fluido-superficie. El fluido en contacto con la superficie se calienta por lo que disminuye su densidad actuando entonces las fuerzas de flotación y provocando el movimiento natural del fluido [4].

Las ecuaciones que describen la transferencia de momento y energía en la convección libre se originan de los principios de conservación relacionados. Las fuerzas inerciales y viscosas siguen siendo importantes, más las fuerzas de empuje juegan un papel principal.

Si tenemos un flujo laminar de capa límite gobernado por fuerzas de flotación (se establecen condiciones de frontera considerando que la capa límite está en la posición cero inicialmente, los gradientes transversales no se consideran para el análisis porque se emplea el método de partícula fluida quedando excluidos los volúmenes de control, $\rho_{\text{aire}} = 1.2193 \text{ kg/m}^3$ así como condiciones estándares de presión y temperatura), se suponen, también, condiciones de propiedades constantes bidimensionales estables en las que, la fuerza de gravedad actúa de manera longitudinal en forma ascendente. Se considera también que el fluido es incompresible y que son válidas las aproximaciones de capa límite.

De las tres vías posibles para abordar un problema fluido-dinámico (volumen de control o análisis integral, partícula

fluida o análisis diferencial y estudio experimental o análisis dimensional) se aborda a partir del análisis diferencial por considerarlo de mayor precisión.

El tratamiento de una partícula fluida se realiza utilizando el método de Hamilton-Jacobi. Las teorías base de Hamilton y Lagrange están desarrolladas por definición en el sistema de coordenadas generalizadas. En un sistema mecánico las coordenadas generalizadas están formadas por el conjunto mínimo de coordenadas independientes o grados de libertad, necesarias para determinar el movimiento del sistema. Las coordenadas generalizadas se representan por q_1, q_2, \dots, q_n variables independientes. Un sistema puede tener n grados de libertad y no es posible representarlo en un gráfico limitado a tres dimensiones.

La teoría de Hamilton presupone el uso de la lagrangiana. Se define la teoría de Lagrange con las variables de posición, velocidad y tiempo, mientras que la hamiltoniana se define por las variables de posición, momento y tiempo, variables que no indican solamente posición en un sistema coordinado.

Ahora bien, aplicando el principio de la mínima acción, principio de Hamilton [5], el cual nos dice que todo sistema mecánico está caracterizado por una función definida:

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) \quad (1)$$

o bien, $L(q, \dot{q}, t)$ y el movimiento del sistema satisface la condición de que la ecuación (2) tome el menor valor posible, es decir, suponiendo que en los instantes $t = t_1$, y $t = t_2$ el sistema ocupa posiciones dadas, caracterizadas por los dos conjuntos de valores de las coordenadas q ; el sistema se mueve entre estas posiciones de manera que la integral,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2)$$

tome el menor valor posible. La función L se llama lagrangiana del sistema, y la integral (2), es la acción. Conociendo la lagrangiana, se obtiene el estado mecánico del sistema, es decir, sus ecuaciones de movimiento.

La formulación de las leyes de la mecánica con la ayuda de la lagrangiana, presupone que el estado mecánico del sistema está determinado dando sus coordenadas y velocidades generalizadas. Sin embargo este no es el único método posible; la descripción del estado de un sistema

en función de sus coordenadas e ímpetus generalizados presenta un cierto número de ventajas, como es el conocimiento de la energía del sistema, así el método de Hamilton, permitirá deducir las ecuaciones de movimiento correspondientes.

3. Determinación de las condiciones de transporte

La hamiltoniana, simbolizada por H , está definida en términos de la lagrangiana L [6], como L es:

$$L = T - V \quad (3)$$

donde T representa la energía cinética y V la energía potencial, y tomando en cuenta que la velocidad con coordenadas generalizadas está definida por \dot{q} entonces:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - mgh \quad (4)$$

y como el momento es:

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \rightarrow \dot{q} = \frac{P}{m} \quad (5)$$

Entonces, a partir de la definición de la hamiltoniana en términos de la lagrangiana y considerando que buscamos obtener la hamiltoniana en un instante, tenemos:

$$H = \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L \quad (6)$$

$$H = \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L = p^* \dot{q} - (1/2 m \dot{q}^2 - mgh) \quad (7)$$

Si el sistema mecánico es conservativo, y el momento se define a partir de la mínima acción [7], entonces sustituyendo en la ecuación (7) se tiene que:

$$H = p^* \dot{q} - \left(\frac{p^2}{2m} - mgh \right) \quad (8)$$

Usando $p = \partial S / \partial q$ y sustituyendo la acción integral, ecuación (2), en la ecuación (8) resulta:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\frac{\partial \delta}{\partial p} \right]^2 + mgh = 0 \quad (9)$$

considerando que

$$\delta = S_1(q) + S_2(t) \quad (10)$$

y sustituyendo (10) en (9) se tiene:

$$\frac{1}{2m} \left[\frac{\partial S_1}{\partial q} \right]^2 + mgh = - \frac{\partial S_2}{\partial t} \quad (11)$$

Ahora, estableciendo una constante β en cada lado de la igualdad resulta:

$$\frac{1}{2m} \left[\frac{\partial S_1}{\partial q} \right]^2 + mgh = \beta \quad \text{y} \quad \frac{dS_2}{dt} = -\beta \quad (12)$$

La solución se obtiene omitiendo las constantes de integración, separando las variables e integrando, entonces:

$$\int dS_1 = \int \sqrt{2m\beta - 2m^2gh} dq \quad \text{y} \quad \int dS_2 = \int -\beta dt \quad (13)$$

$$S_1 = \int \sqrt{2m\beta - 2m^2gh} dq \quad \text{y} \quad S_2 = -\beta t \quad (14)$$

Sustituyendo S_1 y S_2 en la ecuación (10) se tiene:

$$S = \int \sqrt{2m\beta - 2m^2gh} dq - \beta t \quad (15)$$

Identificando β como las nuevas coordenadas del momento P . Entonces la posición de las nuevas coordenadas está definida como:

$$Q = \frac{\partial \delta}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\int \sqrt{2m\beta - 2m^2gh} dq - \beta t \right] \quad (16)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\sqrt{2} m \int \sqrt{\beta - mgh} dq - \beta t \right] \quad (17)$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{2} \int \frac{dq}{\sqrt{\beta - mgh}} - t \quad (18)$$

Pero dado que las nuevas coordenadas Q son una constante γ entonces:

$$\frac{\sqrt{2m}}{2} \int \frac{dq}{\sqrt{\beta - mgh}} - t = \gamma \quad (19)$$

Integrando y resolviendo para q ,

$$q = (\gamma + t) \frac{\sqrt{2\beta - 2mgh}}{\sqrt{m}} \quad (20)$$

se obtiene la ecuación de la posición futura de una partícula en el sistema. Las constantes β y γ se pueden encontrar a partir de las condiciones iniciales.

4. Determinación de las condiciones de transporte en el colector de placa plana para convección natural

Partiendo del primer principio de la termodinámica [7], se tiene:

$$Q - W = T + V + U \quad (21)$$

Donde Q es calor, W es el trabajo, T es la energía cinética, V es la energía potencial y U es la energía interna.

Para el colector en estudio se considera que $dT/dt \approx 0$, entonces $W \approx 0$.

Ahora, tomando en cuenta a la ecuación de enfriamiento de Newton [8]:

$$Q = hA(T_s - T) \quad (22)$$

y sustituyendo (7) y (22) en (21), se tiene

$$hA(T_s - T) = (\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L) + U \quad (23)$$

Como la energía de Hamilton está definida como: $H = T + V$ [9], entonces despejando U de (23) tenemos:

$$U = hA(T_s - T) - (\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L) \quad (24)$$

$$U = hA(T_s - T) - (p\dot{q}(p^2/2m - mgh)) \quad (25)$$

La medición de datos para resolver la ecuación (25) se realizó en la Universidad Tecnológica del Valle del Mezquital, que se encuentra en las coordenadas 20° 29' latitud norte, 99° 13' longitud oeste, la universidad se encuentra en el corazón del Valle del Mezquital.

Para obtener los valores de los parámetros de entrada y salida del fluido, se tomaron en cuenta las mediciones del calor útil (véase figura 1) que experimentalmente se obtuvieron sobre la placa plana de un colector que se encuentra colocado hacia el sur, con una inclinación de 32°.

La medición se realizó durante todo el año, aunque se tomó como ejemplo de cálculo el promedio de los días más calurosos del mes de mayo. También se midieron temperaturas en este mes al filo del mediodía. En la figura 2 se puede observar la disponibilidad de radiación incidente (kJ/h) según el ángulo de inclinación del colector para un sistema fijo de calentamiento en el Valle del Mezquital.

La información fue calculada a partir de los datos obtenidos de Meteororm para las coordenadas 20° 29' latitud norte, 99° 13' longitud oeste, con altura de 1700 m/NM (metros sobre nivel del mar) declarando el lugar como Valle y realizados los cálculos con ayuda del software TRNSYS y EES (*Engineering Equation Solver*), (véase figura 3).

El colector es un prisma de base rectangular construida de lámina común tipo pintro de calibre 18, pintada de negro

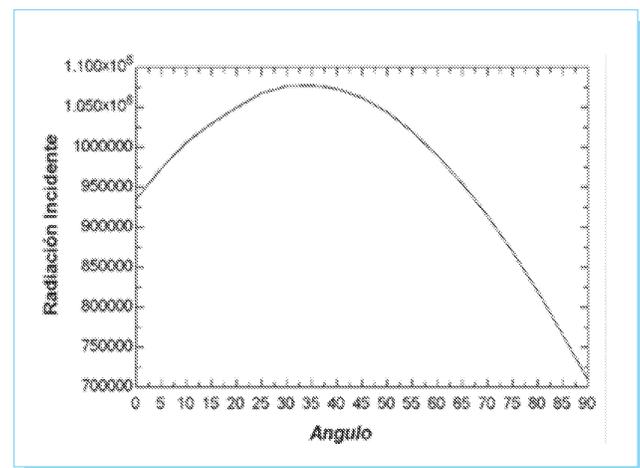


Fig. 1. Calor útil promedio medido en el colector durante el año.



Fig. 2. Radiación incidente en un colector en el Valle de la Muerte según su ángulo de inclinación.

mate, con un aislante de poliestireno expandido de 0.0127 m, un área de colector de 0.2 m², cubierta con un vidrio de 0.003 m que se encuentra separada de la placa absorbente a 0.02 m (véase figura 4).

Con base en las mediciones del calor útil (figura 1) tomadas en el colector de placa plana y considerando una velocidad de desplazamiento del fluido caloportador (\dot{q}) de 1cm/

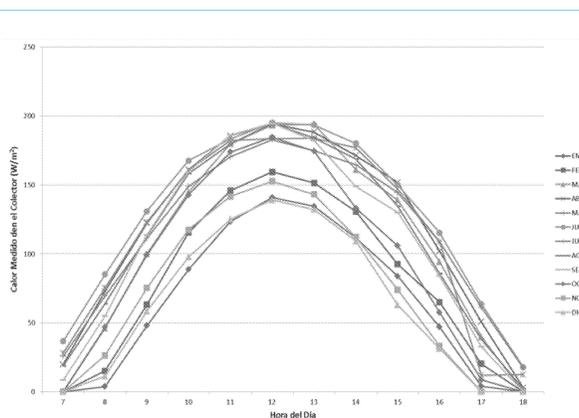


Fig. 3. Radiación anual estimada para plano horizontal en el Valle del Mezquital.

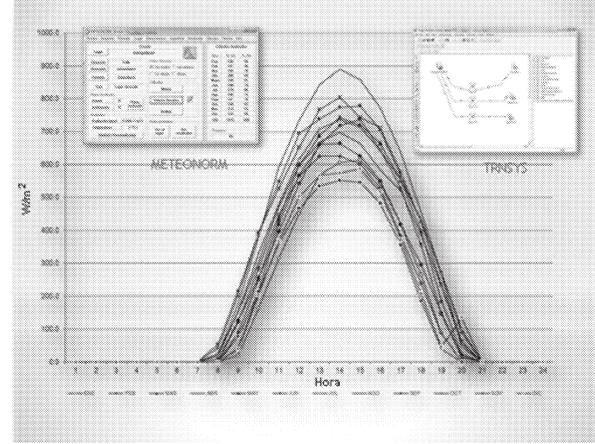


Fig. 4. Colector solar y medición de temperaturas.

s como condición inicial (este dato obtenido en [10] para \dot{q} , que si bien, fue obtenido mediante una metodología diferente, es un dato útil que nos permite proponer una referencia para verificar los resultados de este trabajo) y sustituyendo en la ecuación (25) se determina que:

$$U = 0.9955Q \quad (26)$$

Realizadas las sustituciones de las variables medidas para la ecuación (25) obtenemos que en cualquier instante de tiempo, el 99.55% de la energía incidente en nuestra placa se transforma en energía interna (incremento del gradiente térmico del fluido), por tanto, el resto será la hamiltoniana, entonces:

$$H = 0.0045Q \quad (27)$$

a su vez

$$T = 16.9 \times 10^{-6}H \quad (28)$$

o bien en términos de Q :

$$T = 76.7 \times 10^{-9}Q \quad (29)$$

Como el estado mecánico futuro del sistema está definido por la ecuación (20), si se toman los resultados de las medidas realizadas en el colector, y las condiciones iniciales

como $\beta = H$ y $\gamma = 0.01$ (posición inicial) se tiene:

$$q = (\gamma + t) \frac{\sqrt{2\beta - 2mgh}}{\sqrt{m}}$$

$$q = (0.01 + 1) \frac{\sqrt{2(0.0045Q) - 2(0.3)(9.81)(0.3)}}{\sqrt{0.3}} \quad (30)$$

Donde q toma un valor de 0.026 m, que sería la posición de un diferencial de masa definido, en $t + 1$ segundos para el caso de las condiciones de frontera propuestas.

Finalmente se puede obtener el valor de \dot{q} derivando la ecuación (20), obteniendo así, la velocidad en nuestro sistema; como con la velocidad y la masa se obtiene el momento, consecuentemente resulta el estado mecánico del sistema. Ahora bien,

$$\dot{p}_\alpha = - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (31)$$

que es una de las condiciones de Hamilton. De (3) se tiene:

$$L + H = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (32)$$

$$L + H = mv^2 \quad (33)$$

y sustituyendo el momento en (33),

$$L + H = pv = p \frac{dq}{dt} \quad (34)$$

resulta

$$\frac{p}{dt} = \frac{L + H}{dq} \quad (35)$$

que es la ecuación de conservación de momento para nuestro caso de estudio.

De la condición de conservación del momento (primera ley de Newton):

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad (36)$$

y al proceso de convección natural,

$$-\nabla \cdot p = cte. \quad (37)$$

donde, $T = 1/2 mv^2$,

$$mv_e = \frac{2T}{v_s^2} \cdot \frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{m}} \quad (38)$$

entonces

$$mv_e = \frac{\sqrt{(2T)^3}}{\sqrt{mv_s^2}} \quad (39)$$

resulta

$$mv_e = \sqrt{\frac{8T^3}{mv_s^4}} \quad (40)$$

que es la condición de continuidad para nuestra partícula fluida.

Finalmente con la ecuación (40) se determinan el conjunto de condiciones necesarias y suficientes para el tratamiento del sistema.

Ahora, de la ecuación (26) se puede observar que del calor absorbido por la placa del colector, 99.55% es utilizado para calentar el fluido caloportador, aire. El 0.45% de la energía restante pertenece al hamiltoniano, que es la suma de la energía cinética más la energía potencial.

La energía cinética es $76.7 \times 10^{-9}Q$, por lo que al sustituir una velocidad inicial de 1m/s en la ecuación (20), se encuentra que al segundo siguiente la partícula de aire avanzó 1.6 cm, obteniéndose la velocidad instantánea.

5. Conclusiones

Aplicando las leyes de conservación a un volumen infinitesimal o partícula fluida, se obtuvieron las ecuaciones diferenciales básicas que definen las ecuaciones de transporte, identificándose las variables de posición, velocidad y momento. El análisis realizado contempla estas variables, las cuales de manera directa satisfacen las teorías de Lagrange y Hamilton. Ambas teorías se utilizaron para realizar el tratamiento energético, pues contemplan directamente el potencial cinético (energía de Lagrange) y la energía total (energía de Hamilton).

La mayor cantidad de energía solar incidente sobre la placa plana del colector es utilizada para incrementar el gradiente térmico del fluido, mientras que una pequeña fracción pro-

voca que el aire ascienda por convección natural. El cálculo indica que 99.55% de la energía solar absorbida por el sistema se convierte en energía interna (calor), mientras que 0.45% de la energía restante pertenece al hamiltoniano, la cual contiene la energía cinética más la energía potencial. La solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi indica que el 16.9×10^{-6} del hamiltoniano provoca la convección natural, este valor ocasiona que las moléculas de aire en el colector desarrollen una velocidad de desplazamiento del orden de 0.016 m/s, condición necesaria y suficiente para provocar el flujo másico para la posible deshidratación de perezaderos.

Referencias

- [1] I. Cuadrado, F. Cadavid, J. Agudelo, y C. Sánchez. Unidimensional and Homoeotropic Compressible Flow Modelling Using the Finite Volume Method. *Dyna*, núm. 155, pp. 199-210, Medellín, 2008.
- [2] J. Alvarado, G. Martínez, J. Navarrete, E. Botello, M. Calderón, H. Jiménez. Transport Behavior of Sterilization of Canned Liquid-Food. *Rev. Fac. Ing. Univ. Antioquia*, núm. 50, pp. 87-98, 2009.
- [3] E. H. Holt, R. E. Maskell. *Foundation of plasma Dynamics*. The McMillan Company. Library of Congress Catalog Card Number: 65-14072. USA, pp. 156-175, 1968.
- [4] F. M. White. *Mecánica de fluidos*. McGraw-Hill. México, pp. 1-47, 190-197, 429-480, 1988.
- [5] Landau y Lifshitz. *Curso de física teórica. Volumen I Mecánica*. 2ª ed., Ed. Reverté, pp.1-5, 158-180, 1991.
- [6] Murray R. Spiegel. *Theory and Problems of Theoretical Mechanics*. Schaum Publishing Co., New York: USA, pp. 33-55, 282-332, 1967.
- [7] M. M. Abbott, H. C. Vanness. *Termodinámica*, McGraw-Hill Interamericana, Mexico, pp. 4-14, 1991.
- [8] Yunus A. Çengel. *Heat and Mass Transfer: A practical Approach*. McGraw-Hill, USA, pp. 459-515, 2007.
- [9] R. R. Bate, D. D. Mueller, J. E. White, *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Publications Inc., New York, pp. 51-109, 1971.
- [10] D. R. Pangavhane, R. L. Sawhney, P. N. Sarsavadia. Design, development and performance testing of a new natural convection solar dryer. *Energy*, vol. 27, núm. 2020, pp. 579-590, 2002.

Periódica

Índice de Revistas Latinoamericanas en Ciencias

<http://www.dgbiblio.unam.mx/>

http://132.248.9.1:8991/F/-/?func=find-b-0&local_base=PER01